# Über Hodgezahlen von Vektorbündeln, die auf einer endlichen Überlagerung trivial werden

**Julia Sauter**

Diplomarbeit

vorgelegt dem
Fachbereich Mathematik
der Universität Duisburg-Essen
2. März 2007

Ich möchte mich bei Frau Esnault für die sehr zugängliche, schöne Aufgabenstellung, ihr Engagement und ihren weiten mathemathischen Horizont, der mir noch sehr fehlt, bedanken. Bei Franziska Heinloth bedanke ich mich herzlich für die wöchentlichen Besprechungen, ihre Fachkenntnis, ihre Motivation und Sorgfalt und nicht zu vergessen die Korrektur in letzter Minute. Torsten Wedhorn danke ich für sein Interesse und seine konzeptionellen Anmerkungen und Holger Deppe für die Beantwortung einiger Fragen.

**Voraussetzungen:** Wir setzen Grundkenntnisse der algebraischen Geometrie, in etwa [Har77], Kapitel 2 und 3 voraus. Die Begriffe Spektralsequenz und Hyperkohomologie sollten dem Leser vertraut sein.

**Konvention 0.0.1.** Eine *Varietät* ist ein reduziertes, irreduzibles, separiertes Schema von endlichem Typ über einem Körper.

**Notation 0.0.2.** Für $i \geq 0$ benutzen wir die folgende Bezeichnung

$$\begin{aligned} h^i(X,E) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^i(X,E) \\ h^i_{Hdg}(E) &= \sum_{p+q=i} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^q(X, E \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^p_X) \\ h^i_{dR}(E,\nabla) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^i(E \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^\bullet_X, \nabla), \end{aligned}$$

wobei $(X, E, \nabla)$ so gewählt sind, daß die Kohomologiegruppen rechts wohldefiniert sind[1]. Wir nennen $h^i_{Hdg}(E)$ die ($i$-te) Hodgezahl[2] von $E$.

[1] D.h. für die Garbenkohomologie: $X$ ist ein topologischer Raum, $E$ ist eine Garbe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Für die Hodge-Kohomologie: $X$ ist ein Schema oder analytischer Raum mit Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$, $E$ ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Für die de Rham-Kohomologie: $X$ ist ein Schema oder analytischer Raum, $E$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul mit integrierbarem Zusammenhang $\nabla$.

[2] Unsere Bezeichnung Hodgezahl ist unüblich. Genauer wäre, $h^i_{Hdg}(E)$ die Summe über die Hodgezahlen $h^{pq}(E) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^q(X, E \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^p_X)$ mit $p + q = i$ zu nennen.

# Einleitung

**Zur Aufgabenstellung:** In [PR04], Prop. 3.5 geben Pink und Rössler einen kurzen Beweis für die Aussage:

**Satz 0.0.3.** *Gegeben ein $n$-Torsionsgeradenbündel $L$ auf einer projektiven glatten Varietät $X$ über $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{N}$ teilerfremd zu $n$, so gilt $h^i_{Hdg}(L) = h^i_{Hdg}(L^{\otimes a})\ \forall i \geq 0$, wobei $h^i_{Hdg}(L) := \sum_{p+q=i} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^q(X, L \otimes \Omega^p_X)$ gilt.*

Einen zweiten Beweis haben sie Frau Esnault mündlich mitgeteilt. Ihr ist dazu eine Beweisvariante eingefallen, zu der man einfach eine Verallgemeinerung auf Vektorbündeln von höherem Rang geben kann. Dabei ersetzt man $n$-Torsiongeradenbündel durch Vektorbündel, die auf eine endliche Überlagerung zurückgezogen trivial werden. Sie hat mir daraufhin die folgende Aufgabe für meine Diplomarbeit gestellt (hier eine gekürzte Version):

A) Schreiben Sie den (unveröffentlichten) Beweis von Pink und Rössler über die Hodgezahlen von Torsionsgeradenbündeln auf.

B) Führen Sie die vorgeschlagene Variante des Beweises mit Hilfe der Darstellungstheorie, die zu den lokalen Systemen gehört, aus.

C) Verallgemeinern Sie A) und B).

Im wesentlichen orientiert sich der Aufbau der Arbeit an der Aufgabenstellung. Nach einem ersten Kapitel über die vorausgesetzte Theorie bearbeiten wir in Kapitel 2/3/4 die Aufgabe A/B/C.

**Zum Inhalt:** Wir geben eine Skizze der Verallgemeinerung und sagen, wie man den Satz von Pink und Rössler zurückerhält. Es sei $\pi : Y \to X$ die Analytifizierung einer $G$-Galoisüberlagerung projektiver glatter Varietäten über $\mathbb{C}$. Dann haben wir Äquivalenzen von Kategorien

$$\begin{tikzcd}
(\pi^{-1}\text{-triv. lok. Syst. auf } X) \arrow[d, "-\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_X"'] \arrow[dr, "\mathcal{M}"] & \\
& (\text{komplexe Darst. } G \to Gl(V)) \\
(\pi^{*}\text{-triv. lok. freie } \mathcal{O}_X\text{-Mod.}), \arrow[ur, "\mathbb{M}"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\mathcal{M}$ die in Satz 1.4.9 beschriebene Monodromie-Korrespondenz und $\mathbb{M}$ die in Satz 4.1.4 beschriebene Monodromie-Korrespondenz für Vektorbündel ist. Für die Kommutativität des Diagramms siehe Korollar 4.1.5.
Unser Hauptergebnis ist der folgende Satz, siehe 4.2.1

**Satz 0.0.4.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine $G$-Galoisüberlagerung glatter projektiver komplexer Varietäten, es seien $\rho,\ \rho' : G \to Gl_r(\mathbb{C})$ zwei Darstellungen von $G$, die durch einen Körperautomorphismus $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auseinander hervorgehen (i.e. $\rho = \tilde{\tau} \circ \rho'$, wobei $\tilde{\tau} : Gl_r(\mathbb{C}) \to Gl_r(\mathbb{C})$, $(a_{ij})_{ij} \mapsto (\tau(a_{ij}))_{ij}$ ist). Es seien $E_\rho$, $E_{\rho'}$ die durch Monodromie definierten Vektorbündel. Dann gilt*

$$h^i_{Hdg}(E_\rho) = h^i_{Hdg}(E_{\rho'}).$$

Dafür geben wir zwei Beweise. Via Monodromie korrespondieren zu $\rho$ und $\rho'$ lokale System $\mathcal{E}_\rho, \mathcal{E}_{\rho'}$, die zu den Vektorbündeln mit integrierbaren Zusammenhängen $(E_\rho, \nabla_\rho), (E_{\rho'}, \nabla_{\rho'})$ korrespondieren, siehe Satz 1.4.3. Beide Beweise beruhen auf der Degeneration der Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenzen für $(E_\rho, \nabla_\rho)$ und $(E_{\rho'}, \nabla_{\rho'})$, siehe Bemerkung 4.1.7. Damit dürfen wir in der Behauptung die Hodgezahlen durch die Dimensionen der Hyperkohomologie $h^i_{dR}(E_\rho, \nabla_\rho)$, $h^i_{dR}(E_{\rho'}, \nabla_{\rho'})$ der beiden Komplexe ersetzen.

**Methode von Frau Esnault:** Wir geben einfach einen $\tau$-linearen[3] Isomorphismus der zugrundeliegenden lokalen Systeme $\mathcal{E}_\rho \to \mathcal{E}_{\rho'}$ an. Das impliziert, daß $h^i(X, \mathcal{E}_\rho) = h^i(X, \mathcal{E}_{\rho'})$ für $i \geq 0$, siehe Lemma 4.2.2. Wieder aus Satz 1.4.3 folgt $h^i(X, \mathcal{E}_\rho) = h^i_{dR}(E_\rho, \nabla_\rho)$, $h^i(X, \mathcal{E}_{\rho'}) = h^i_{dR}(E_{\rho'}, \nabla_{\rho'})$.

**Methode von Pink/Rössler:** Wir zeigen die Operation $R : G \to Gl(\mathbb{H}^i(\pi_* \mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y))$ ist schon über $\mathbb{Q}$ definiert, siehe Bemerkung 2.3.8. Es sei $\chi_R = m_1\chi_1 + \cdots + m_h\chi_h$ die Zerlegung des Charakters von $R$ in die Summe irreduzibler Charaktere. Da $R$ über $\mathbb{Q}$ definiert ist, folgt $\chi_R = \tau \circ \chi_R$ und somit $m_i = m_{\tau(i)}$, $1 \leq i \leq h$, wobei $\chi_{\tau(i)} := \tau \circ \chi_i$. Es sei $(E_i, \nabla_i)$ ein zu $\chi_i$ via Monodromie korrespondierendes Vektorbündel mit integrierbaren Zusammenhang, wir zeigen $h^i_{dR}(E_i, \nabla_i) = m_i$, siehe Beweis 4.4. Da die Kategorie der Darstellungen von $G$ über $\mathbb{C}$ halbeinfach ist, ist es die Kategorie der $\pi^*$-trivialen Vektorbündel auch, und damit folgt die Behauptung.

Den Satz von Pink und Rössler erhält man zurück, wenn man die folgende Situation betrachtet: Mit einem $n$-Torsionsgeradenbündel $L$ konstruiert man eine $\mu_n$-Galoisüberlagerung, siehe 2.1.1

$$\pi : Y := \operatorname{Spec} \bigoplus_{i=0}^{n-1} L^{\otimes i} \to X.$$

[3] das heißt, er überführt Skalarmultiplikation in die mit $\tau$ verknüpfte Skalarmultiplikation

Auf diese zurückgezogen ist $L$ trivial, siehe Lemma 3.0.9. Als $\tau$ wählt man einen Körperautomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, der auf $\mu_n$ einfach $a$-faches Potenzieren ist, wobei $a$ teilerfremd zu $n$ ist. Dann identifiziert $\tau$ den Charakter von $L$ mit dem von $L^{\otimes a}$ und die Behauptung folgt.

Den ursprünglich von Pink und Rössler vorgeschlagenen Beweis findet man in Kapitel 2. Da dieser Beweis mir schon recht ausführlich erklärt wurde, habe ich ihn sehr ausführlich aufgeschrieben. Die Beweisvariante von Frau Esnault findet man in Kapitel 3.

Wen nur die Verallgemeinerung interessiert, der kann erst Abschnitt 1.4.6 und dann direkt Kapitel 4 lesen. Er sei darauf hingewiesen, daß Varietäten durch Konvention 0.0.1 irreduzibel und Galoisüberlagerungen wegzusammenhängend, also insbesondere zusammenhängend, sind, siehe Definition 1.2.2 (ii).

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorwissen

Eine Varietät ist immer wie in Konvention 0.0.1 definiert. Es sei $X$ eine eigentliche glatte Varietät über den komplexen Zahlen, $E$ ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul vom Rang $r$ mit einem integrierbaren Zusammenhang $\nabla$, das heißt per Definition

**Definition 1.0.5.** —- `integrierbarer Zusammenhang`: Eine Abbildung von abelschen Garben $\nabla : E \to \Omega^1_{X/\mathbb{C}} \otimes E$ heißt <u>Zusammenhang auf $E$</u>, falls gilt

(i) $\nabla$ ist $\mathbb{C}_X$-linear, wobei $\mathbb{C}_X$ die konstante Garbe gleich $\mathbb{C}$ auf $X$ bezeichnet.

(ii) (Leibnizregel) Für $U \subset X$ offen, $\phi \in \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(U), e \in E(U)$

$$\nabla(\phi e) = d\phi \otimes e + \phi \nabla e.$$

Ein Zusammenhang $(E, \nabla)$ induziert eine $\mathbb{C}_X$-lineare Abbildung $\nabla : \Omega^p_X \otimes E \to \Omega^{p+1}_X \otimes E$, so daß für $U \subset X$ offen, $\omega \in \Omega^p_X(U), e \in E(U)$ gilt

$$\nabla(\omega \otimes e) = d\omega \otimes e + (-1)^p \omega \wedge \nabla e.$$

Ein Zusammenhang $(E, \nabla)$ heißt <u>integrierbar</u> (oder flach), falls $\nabla \circ \nabla : E \to \Omega^1_X \otimes E \to \Omega^2_X \otimes E$ die Nullabbildung ist.

## 1.1 Analytifizieren

Wir definieren den Funktor Analytifizieren

$$(X, E, \nabla) \mapsto (X^{\mathrm{an}}, E^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}}),$$

der einer eigentlichen glatten Varietät $X$ über $\mathbb{C}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit $X^{\mathrm{an}}$ zuordnet. Algebraischen Vektorbündeln mit integrierbarem Zusammenhang ordnen wir holomorphe Vektorbündel mit integrierbarem Zusammenhang zu.

**Bemerkung 1.1.1.** Zur Literatur: Als Standard-Quelle für die Analytifizierung von $(X, E)$ muss man von Serre [Ser56] nennen. Dieser Text wird üblicher Weise als GAGA bezeichnet, sein Hauptergebnis (s. später 1.1.7, (ii)) wird häufig als GAGA-Prinzip bezeichnet. Wir zitieren viel aus der abstrakteren und detaillierteren Darstellung [Gro61], XII von Raynaud.
Die Analytifizierung eines Zusammenhanges wird in der Literatur wenig beschrieben.

Man findet eine Beschreibung von Zusammenhängen, siehe [Del70], 2.3 auf Seite 6 und 7. Er nimmt die erste infinitisimale Umgebung $X_1$ der Diagonale in $X \times X$, $p_i : X_1 \to X,\ i = 1, 2$ seien die Projektionen. Dann entspricht einem Zusammenhang auf $E$ ein Morphismus $E \to (p_1)_*(p_2)^*E$ von kohärenten $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln, auf den man direkt GAGA-Prinzipien anwenden kann. Alternativ findet man eine längere Version davon in EGA IV, Abschnitt 16.7 und 16.8. Wir ziehen es vor, eine naivere Definition der Analytifizierung zu geben.

### 1.1.2 Der analytische Raum

Es seien $\mathcal{O}_U$ die Garbe der holomorphen Funktionen auf einer offenen[1] Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$, $f_1, \dots f_m \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Wir definieren

$$N := N(f_1, \dots, f_m) := \{z \in U | f_1(z) = \cdots f_m(z) = 0\} \tag{1.1}$$
$$\mathcal{O}_N := \mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_m). \tag{1.2}$$

Wir nennen den Raum $(N, \mathcal{O}_N)$ *glatt*, falls der Rang der Jakobi-Matrix von $f_1, \dots, f_m$ auf $U$ konstant $n - m$ ist. Ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ heißt (komplexer) *(glatter) analytischer Raum*, falls er lokal als lokal geringter Raum isomorph zu einem (glatten) der Form $(N, \mathcal{O}_N)$ ist.

Der *assoziierte analytische Raum* zu einem Schema von endlichem Typ (*kurz:* veT) über $\mathbb{C}$: Es sei $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[T_1, \dots T_n]/(f_1, \dots f_m)$. Wir fassen die regulären Funktionen $f_1, \dots f_m \in \Gamma(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$ als holomorphe Funktionen $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ auf und definieren

$$(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) := (N(f_1, \dots, f_m), \mathcal{O}_N).$$

Die Inklusion $\phi : X^{\mathrm{an}} \to X$ topologischer Räume ist stetig, und wir erhalten $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \to \phi_* \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ einfach dadurch, daß wir reguläre Funktionen als holomorphe auffassen. Also erhalten wir eine Abbildung lokal geringter Räume

$$\phi : (X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) \to (X, \mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \quad (\star).$$

Für $X$ beliebig, von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, wähle Überdeckung durch offene affine Mengen und analytifiziere diese wie gerade beschrieben. Die Verklebedaten für die affinen Mengen liefern Verklebedaten für deren Analytifizierungen. So erhalten wir den Raum $(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}})$. Die lokal definierten Abbildungen $(\star)$ verkleben sich zu einer Abbildung lokal geringter Räume $\phi : (X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) \to (X, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$.

**Eigenschaften 1.1.3.** *Es sei $X$ ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$.*

*(i) Der unterliegende topologische Raum von $X^{\mathrm{an}}$ ist $X(\mathbb{C})$.*

[1] in der von der euklidischen Norm induzierten üblichen Topologie

*(ii)* $()^{\mathrm{an}} : X \mapsto X^{\mathrm{an}}$ *definiert einen Funktor von der Kategorie der Schemata von endlichem Typ über* $\mathbb{C}$ *in die Kategorie der analytischen Räume. Der Funktor ist auf eigentliche Schemata eingeschränkt volltreu.*

*Beweis.* Für (i) siehe [Gro61], exposé XII, Thm 1.1; für (ii) siehe [Gro61], exposé XII, Absatz 1.2, Cor 4.5 □

**Bemerkung 1.1.4.** Jede komplexe Mannigfaltigkeit mit ihrer Garbe holomorpher Funktionen ist ein glatter analytischer Raum. Genauer gesagt, es gibt eine Äquivalenz von Kategorien

$$\big(\text{glatte analytische Räume}\big) \longrightarrow \big(\text{komplexe Mannigfaltigkeiten}\big).$$

Das folgt aus dem Satz über lokale Parametrisierungen, der besagt: Wenn man die zu den glatten analytischen Karten $(N, \mathcal{O}_N)$ gehörigen offenen Mengen $U$ hinreichend klein wählt, gibt es einen biholomorphe Abbildung $F : U \to W = W(0) \subset \mathbb{C}^n$, wobei $W$ eine offene Umgebung von 0 ist, so daß $F(N) = \{(w_1, \dots w_n) \in W | \; w_{n-m+1} = \dots = w_n = 0\}$ gilt, siehe hierzu auch [Mum88], Seite 168, Cor. 2. Da die Analytifizierung eines glatten Schemas ein glatter analytischer Raum ist, erhalten wir mit 1.1.3, (iii)[2]

$$\big(\text{glatte Schemata veT}/\mathbb{C}\big) \longrightarrow \big(\text{komplexe Mannigfaltigkeiten}\big)$$

und eine volltreue Einbettung

$$\begin{pmatrix}\text{eigentliche glatte}\\ \text{Schemata veT}/\mathbb{C}\end{pmatrix} \hookrightarrow \begin{pmatrix}\text{kompakte komplexe}\\ \text{Mannigfaltigkeiten}\end{pmatrix},$$

für die Kompaktheit siehe [Har77], Seite 107, Ex.4.10.

**Eigenschaften 1.1.5.** *Es sei $X$ ein glattes Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$. Dann ist $X$ genau dann zusammenhängend, wenn $X^{\mathrm{an}}$ zusammenhängend ist. $X$ hat genau dann Dimension $n$ über $\mathbb{C}$, wenn $X^{\mathrm{an}}$ eine $n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit ist. Wenn $X$ zusammenhängend ist, ist es irreduzibel und $X^{\mathrm{an}}$ ist sogar wegzusammenhängend.*

*Beweis.* siehe [Gro61], XII, Prop 2.1 und Prop. 2.4. Für die letzte Aussage siehe [Mum74], Seite 56. □

### 1.1.6 Analytifizierte Garben

Es sei $X$ ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, $E$ ein $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul, dann definiere

$$E^{\mathrm{an}} := \phi^* E = \phi^{-1} E \otimes_{\phi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}.$$

[2] veT=von endlichem Typ

Die Koeinheit der Adjunktion liefert einen natürlichen Morphismus $E \to \phi_* E^{\mathrm{an}}$, der eine natürliche Abbildung auf der Kohomologie

$$\beta = \beta^i(E) : \mathrm{H}^i(X, E) \to \mathrm{H}^i(X^{\mathrm{an}}, E^{\mathrm{an}})$$

induziert.

**Eigenschaften 1.1.7.** *Es sei $X$ ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$.*

*(i)* *Der Funktor $()^{\mathrm{an}} : (\mathcal{O}_{\mathrm{X}} - Mod) \to (\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} - Mod)$ ist exakt. Er überführt kohärente Moduln in kohärente und lokal freie vom Rang $r$ in lokal freie vom Rang $r$.*

*(ii)* —- `Satz von Serre`: *Für $X$ eigentlich ist*

$$()^{\mathrm{an}} : (koh.\ \mathcal{O}_X - Mod) \to (koh.\ \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} - Mod)$$

*eine Äquivalenz von Kategorien. Für einen kohärenten $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul $E$ sind*

$$\beta^i : \mathrm{H}^i(X, E) \to \mathrm{H}^i(X^{\mathrm{an}}, E^{\mathrm{an}}),\ i \geq 0$$

*Isomorphismen.*

*Beweis.* Für die erste Aussage in (i) zeigt man $\phi$ ist flach, siehe [Gro61], exposé XII, Thm 1.1, Absatz 1.3.; für (ii) siehe [Gro61], exposé XII, Thm 4.4, Cor 4.3. □

### 1.1.8 Analytifizierte Zusammenhänge

Zuerst definieren wir den *analytischen de Rham-Komplex* für eine komplexe Mannigfaltigkeit:
Für $U \subset \mathbb{C}^n$ offen sei $\Omega^1_{\mathbb{C}^n}(U)$ der freie $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U)$-Modul erzeugt von den Symbolen $dz_i$, $1 \leq i \leq n$, und $d : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(U) \to \Omega^1_{\mathbb{C}^n}(U)$ sei definiert durch

$$df := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i$$

Für einen analytischen Raum der Form $(N = N(f_1, \ldots, f_m), \mathcal{O}_N)$ wie in 1.1 eingeführt definieren wir

$$\Omega^1_N := \Omega^1_{\mathbb{C}^n}|_U / (f_1, \ldots, f_m, df_1, \ldots df_m)$$

und $\mathcal{O}_U \xrightarrow{d} \Omega^1_{\mathbb{C}^n}|_U \twoheadrightarrow \Omega^1_N$ faktorisiert über $d : \mathcal{O}_N \to \Omega^1_N$.
Ist $(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}})$ ein analytischer Raum, $U^{\mathrm{an}} \subset X^{\mathrm{an}}$ offen mit $(U^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}|_{U^{\mathrm{an}}})$ ist von der Form 1.1, so definiere

$$(\Omega^1_{X^{\mathrm{an}}}|_{U^{\mathrm{an}}}, d) := (\Omega^1_{U^{\mathrm{an}}}, d)$$

die Verklebung ist analog zu der von $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$.

**Bemerkung 1.1.9.** (i) Es sei $X$ ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, dann sieht man

$$(\Omega^1_X)^{\mathrm{an}} \cong \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}}$$

und wir haben eine Abbildung von Komplexen $\Omega^\bullet_X \to \phi_* \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}}$.

(ii) Der Begriff integrierbarer Zusammenhang auf einem lokal freien $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-Modul ist analog zu vorher definiert.[3]

Es sei nun $X$ ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, $E$ ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul vom Rang $r$ mit einem integrierbaren Zusammenhang $\nabla$. Dann gibt es einen eindeutigen integrierbaren Zusammenhang $\nabla^{\mathrm{an}}$ auf $E^{\mathrm{an}}$, der auf algebraischen Mengen mit $\nabla$ übereinstimmt:
Da es reicht $\nabla^{\mathrm{an}}$ für eine Basis der Topologie zu definieren, nehmen wir ohne Einschränkung an, daß $\nabla$ auf $X$ die Leibnizregel erfüllt und $E = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}{}^r$. Sei $U$ offen in $X^{\mathrm{an}}$. Es sei $e_1, \dots e_r$ die kanonische Basis von $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(U)^r$ , ebenso bezeichnen wir die von $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(X)^r$. Wir haben $\varphi : \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(X) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}}) \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(U)$, $\psi : \Omega^1_X(X) \to \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}}(X^{\mathrm{an}}) \to \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}}(U)$. Damit das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(X)^r \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "\varphi^r"] & \mathcal{O}_{\mathrm{X}}{}^r \otimes \Omega^1_X(X) \arrow[d, "\psi^r"] \\
\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(U)^r \arrow[r, "\nabla^{\mathrm{an}}"'] & \mathcal{O}^r_{X^{\mathrm{an}}} \otimes \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}}(U)
\end{tikzcd}$$

kommutiert, muss gelten $\nabla^{\mathrm{an}}(e_i) := \psi^r(\nabla(e_i))$. Dann hat man $\nabla^{\mathrm{an}}$ über die Leibnizregel eindeutig definiert. Somit folgt die Eindeutigkeit und die Existenz. Man folgert aus $\nabla \circ \nabla = 0$, daß $\nabla^{\mathrm{an}} \circ \nabla^{\mathrm{an}} = 0$ gilt.

**Bemerkung 1.1.10.** Es sei $(X, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ oder ein analytischer Raum. Sind $F, G$ zwei lokal freie $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln mit Zusammehängen $\nabla_F, \nabla_G$, so definieren wir den Tensorzusammenhang $\nabla_F \otimes \nabla_G$ auf $F \otimes G$ lokal durch $(\nabla_F \otimes \nabla_G)(f \otimes g) = \nabla_F(f) \otimes g + f \otimes \nabla_G(g)$.
Ist $X$ ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, so gilt

$$(\nabla_F \otimes \nabla_G)^{\mathrm{an}} = (\nabla_F)^{\mathrm{an}} \otimes (\nabla_G)^{\mathrm{an}}.$$

(Zum Beweis: Man überprüft die Aussage mit der obigen Definition im Lokalen.)

[3] i.e. $X^{\mathrm{an}}, E^{\mathrm{an}}$ analytischer Raum, $E^{\mathrm{an}}$ lokal freier $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$-Modul; $\nabla^{\mathrm{an}} : E^{\mathrm{an}} \to E^{\mathrm{an}} \otimes \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}}$ ist $\mathbb{C}$-linear ist, für $U \subset X^{\mathrm{an}}$ offen, $f \in \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}(U), e \in E^{\mathrm{an}}(U)$ gilt die Leibnizregel

$$\nabla^{\mathrm{an}}(fe) = df \otimes e + f\nabla^{\mathrm{an}} e$$

und $\nabla^{\mathrm{an}} \circ \nabla^{\mathrm{an}} = 0$.

### 1.1.11 Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenzen

Es sei $X$ ein Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ oder eine komplexe Mannigfaltigkeit, $E$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul mit integrierbarem Zusammenhang $\nabla$. Wir nennen die Hyperkohomologie $\mathbb{H}^n(E,\nabla) := \mathbb{H}^n(\Omega_X^\bullet \otimes E, \nabla)$ die *de Rham-Kohomologie von* $(E,\nabla)$, die Dimension bezeichnen wir mit $h^n_{dR}(E,\nabla) := \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^n(E,\nabla)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann erhalten wir eine Spektralsequenz[4]

$$E_1^{pq} = \mathrm{H}^q(X, E \otimes \Omega_X^p) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(E,\nabla) =: E^{p+q},$$

die wir *Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenz* nennen.

### 1.1.12 Vergleich algebraisch-analytisch

Es sei $X$ wieder ein eigentliches Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$. Aus der Definition der Analytifizierung erhalten wir einen natürlichen Morphismus von Komplexen

$$(E,\nabla) \to (\phi_* E^{\mathrm{an}}, \phi_* \nabla^{\mathrm{an}}).$$

Nach dem Satz 1.1.7 (ii) von Serre induziert dieser für ein eigentliches Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ isomorphe Hodge nach de Rham Spektralsequenzen. Insbesondere sind die Ziele dieser Spektralsequenzen, i.e. die Hyperkohomologie der Komplexe $(E,\nabla)$ und $(E^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})$, isomorph.

**Korollar 1.1.13.** *Ist $X$ ein eigentliches Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$, $E$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul mit integrierbarem Zusammenhang $\nabla$, so erhalten wir (nat.) Isomorphismen*

$$\mathbb{H}^i(E,\nabla) \to \mathbb{H}^i(E^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}}).$$

## 1.2 Überlagerungen

### 1.2.1 topologisch

In diesem Abschnitt benutze ich [SZ94] als Referenz.

**Definition 1.2.2.** —- `topologische Überlagerungen:`

(i) Eine stetige Abbildung $p : Y \to X$ zwischen topologische Räumen heißt *Überlagerung*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U$ besitzt, so daß $p^{-1}(U)$ in $Y$ aus einer Vereinigung paarweise disjunkter Mengen $S_y, y \in p^{-1}(x)$ besteht, die via $p$ homöomorph auf $U$ abgebildet werden. Falls $p^{-1}(x)$ eine endliche Menge ist, nennen wir die Überlagerung *endlich* [5].

[4] die Filtration bête auf dem Komplex $E \otimes \Omega_X^\bullet$ definiert die Spektralsequenz.

[5] per Definition ist das quasi-endlich. Nimmt man hinzu, daß eine quasi-endliche Überlagerung ebenfalls eigentlich ist (i.e. Urbilder kompakter sind wieder kompakt), und eigentlich+quasi-endlich =endlich gilt, sind die Definition wieder gerechtfertigt

(ii) Eine Überlagerung wegzusammenhängender topologischer Räume heißt *Galoisüberlagerung* oder *regulär*, falls die Decktransformationsgruppe $G = Aut_X(Y)$ frei und transitiv auf den Fasern $p^{-1}(x),\ x \in X$ operiert

**Bemerkung 1.2.3.** Die Freiheit der Operation ist für jede wegzusammenhängende Überlagerung $(Y \neq \emptyset)$ gegeben, siehe [SZ94], Seite 161, Satz 6.5.3. Insbesondere ist eine endliche Überlagerung $p : Y \to X$ wegzusammenhängender topologischer Räume genau dann galoissch, wenn $|Aut_X(Y)| = |p^{-1}(x)|$ mit $x \in X$ beliebig gilt.

**Satz 1.2.4.** *$X$ besitzt genau dann eine universelle Überlagerung, wenn es wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist. In diesem Fall gibt es eine Äquivalenz von Kategorien ($x \in X$ beliebig)*

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \textit{punktierte zusammenhängende} \\ \textit{Überlagerungen von } (X,x) \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \textit{Untergruppen} \\ \textit{von } \pi_1(X,x) \end{pmatrix} \\ (Y,y) \xrightarrow{p} (X,x) & \longmapsto & p_*(\pi_1(Y,y)) \end{array}$$

*wobei links Morphismen punktierte Zwischenüberlagerungen und rechts Inklusionen sind. Dabei ist $|p^{-1}(x)|$ ist der Index der Untergruppe $p_*(\pi_1(Y,y))$ in $\pi_1(X,x)$, i.e. endliche punktierte zusammenhängende Überlagerungen entsprechen Untergruppen mit endlichem Index. Fixiert man keinen Basispunkt in der Überlagerung, ist die Untergruppe nur bis auf Konjugation eindeutig, also brauchen wir bei normalen Untergruppen keine Punktierung. Ist $H$ eine Untergruppe von $\pi_1(X,x)$, die zu Überlagerung $(Y,y) \xrightarrow{p} (X,x)$ korrespondiert, so gilt für $N = \{g \in \pi_1(X,x) | gHg^{-1} \subset H\}$, daß $N/H \cong Aut_X(Y)$. Ist $H$ normal in $\pi_1(X,x)$, so gilt $\pi_1(X,x)/H = Aut_X(Y)$. Galoisüberlagerungen korrespondieren zu normalen Untergruppen. Nehmen wir anstatt der normalen Untergruppen mit Inklusionen die Quotienten mit Epimorphismen, so gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \textit{Isomorphieklassen von} \\ \textit{Galoisüberlagerungen von } X \end{pmatrix} & \longrightarrow & \big(\textit{Quotienten von } \pi_1(X,x)\big) \\ (Y,p) & \longmapsto & Aut_X(Y) \end{array}$$

*Beweis.* Siehe irgendein Topologiebuch, zum Beispiel [SZ94], Seite 157-166 und [Ful95] Kapitel.12-14. □

**Lemma 1.2.5.** *Es sei $X$ ein topologischer Raum, der eine universelle Überlagerung besitzt, $Y \xrightarrow{p} X$ eine endliche zusammenhängende Überlagerung von $X$. Dann gibt es eine endliche Galoisüberlagerung $Y_{reg} \xrightarrow{q} X$ und eine Überlagerung $r : Y_{reg} \to Y$, so daß $q = p \circ r$ gilt. (Es gilt sogar: $(Y_{reg}, q)$ ist universell für alle Galoisüberlagerungen von $X$, die über $p$ faktorisieren und damit eindeutig)*

*Beweis.* Fixiere $y \in Y$ mit $p(y) = x \in X$, sei $H$ die entsprechende Untergruppe von $G := \pi_1(X,x)$. Die größte in $G$ normale Untergruppe von $H$ ist $N := \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$. Ist $G =$

$\bigcup_{i=1}^{r} g_i H$, so gilt $N = \bigcap_{i=1}^{r} g_i H g_i^{-1}$. Es gilt: $G/H \to G/gHg^{-1},\ g_iH \mapsto gg_ig^{-1}(gHg^{-1})$ ist ein Isomorphismus von $G$-Mengen, insbesondere haben alle $g_iHg_i^{-1}$ endlichen Index. Es reicht nun zu sehen, daß der Schnitt zweier Untergruppen $F, H$ von $G$ mit endlichem Index in $G$ wieder endlichen Index in $G$ hat. Wegen $[G : F \cap H] = [G : H][H : F \cap H]$ reicht $[H : F \cap H] < \infty$ zu sehen. Die Abbildung $H \to G$ induziert eine injektive Abbildung von Mengen $H/F \cap H \to G/F$, also gilt $[H : F \cap H] \leq [G : F] < \infty$. □

**Bemerkung 1.2.6.** Es sei $\pi : Y \to X$ eine topologische Überlagerung. Dann ist $X$ genau dann eine ($d$-dimensionale) Mannigfaltigkeit[6], wenn $Y$ eine ($d$-dimensionale) Mannigfaltigkeit ist. Jede Mannigfaltigkeit besitzt eine universelle Überlagerung, siehe [SZ94] Seite 160 Beispiel 6.4.5 (a).

### 1.2.7 algebraisch

**Definition 1.2.8.** —- `algebraische Überlagerungen:`

(i) Ein Morphismus $Y \to X$ zwischen lokal noetherschen Schemata heißt *Überlagerung*, falls er endlich und étale ist.

(ii) Es seien $X, Y$ Varietäten über einem Körper $k$. Eine Überlagerung $Y \to X$ über $k$ heißt
*Galoisüberlagerung* mit Galoisgruppe $G := Aut_X(Y)$, falls $[K(Y) : K(X)] = |Aut_X(Y)|$ gilt.

**Eigenschaften 1.2.9.** *A) Es sei $\pi : Y \to X$ ein surjektiver étaler Morphismus lokal noetherscher Schemata. Dann gilt: $X$ ist genau dann reduziert/ normal/ regulär, wenn $Y$ reduziert/ normal/ regulär ist.* [7]

*B) Ist $\pi : Y \to X$ ein endlicher Morphismus von Varietäten, so gilt:*

*(i) $X$ ist genau dann eigentlich, wenn $Y$ eigentlich ist.*

*(ii) $X$ ist genau dann projektiv, wenn $Y$ projektiv ist.*

*Beweis.* A) Siehe [Gro61], I,Cor.9.2, Prop.9.2 und Cor.9.10.
B)(i) Sei $X$ eigentlich. Jeder endliche Morphismus ist eigentlich und
Verknüpfungen von eigentlichen Morphismen sind eigentlich, siehe [Har77] Seite 105, Ex. 4.1 und Seite 102, Cor.4.8 (b). Andersherum, falls $Y$ eigentlich ist, benutzt man, daß $X$ als Varietät per Definition separiert ist und die Behauptung folgt mit [Har77], Seite 102, Cor.4.8 (e).
(ii) Sei $X$ projektiv mit amplen Geradenbündel $L$, dann ist $\pi^*L$ wieder ampel und somit

[6]komplex oder reell

[7]Für ein Schema von endlichem Typ über einem perfekten Körper gilt: Es ist genau dann regulär, wenn es glatt ist, siehe [Liu02], Seite 142, Cor. 3.33.

$Y$ projektiv. Denn man kann das kohomologische Kriterium für Ampelheit, siehe [Har77], Seite 229, und die Projektionsformel, siehe [Har77], Seite 124, benutzen. Andersherum ist $Y$ projektiv, benutzt man wieder die Separiertheit von $X$ und dann [Har77], Seite 107, Ex. 4.9 und 4.8 (e).

$\square$

**Bemerkung 1.2.10.** Ist $\pi : Y \to X$ eine algebraische Galoisüberlagerung über einem Körper $k$, so gilt, da $\pi$ endlich und étale ist, $|Aut_X(Y)| = [K(Y) : K(X)] = |\pi^{-1}(x)(\bar{k})|$ mit $x \in X$ beliebig, siehe [Gro61],I, Prop. 10.9.

**Bemerkung 1.2.11.** (i) Es sei $X$ ein Schema. Dann gibt eine Äquivalenz von Kategorien

$$\big(\text{Überlagerungen von } X\big) \longleftrightarrow \big(\text{endliche étale } \mathcal{O}_{\mathrm{X}}\text{-Algebren}\big)$$
$$(\pi : Y \to X) \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_Y$$
$$(\operatorname{Spec}\mathcal{A} \to \operatorname{Spec}\,\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \longleftarrow (\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \to \mathcal{A})$$

Insbesondere gilt dann $Aut_X(Y) = Aut_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}-Alg.}(\mathcal{A})$.

(ii) Es sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung normaler Varietäten, somit können wir $G := Aut_X(Y)$ als Untergruppe von $Aut_{K(X)}(K(Y))$ auffassen. Es sei $\mathcal{A} = \pi_*\mathcal{O}_Y$ die zugehörige endliche étale $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Algebra. Dann ist $\pi$ genau dann galoissch, wenn $\mathcal{A}^G \cong \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$.

*Beweis.* (i) per Definition.
(ii) Sei $\mathcal{A}^G \cong \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$. Dann gilt per Definition für jede offene Menge $U \subset X$ $\mathcal{A}(U)^G \cong \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(U)$. Das impliziert $K(Y)^G \cong K(X)$. Also nach [Lan71], Seite 194, Thm. 2 (von Artin) ist $K(Y)$ galoissch über $K(X)$ mit Galoisgruppe $G$, i.e. $|G| = [K(Y) : K(X)]$. Ist andersherum $\pi$ galoissch, so folgt per Definition, daß $G = Aut_{K(X)}(K(Y))$[8] eine Gruppe mit $[K(Y) : K(X)]$ Elementen ist. Also ist $K(Y)$ galoissch über $K(X)$ mit Galoisgruppe $G$, bzw. $K(Y)^G \cong K(X)$. Sei nun $U \subset X$ offen, $A = \mathcal{A}(U)$, $B = \mathcal{O}_{\mathrm{X}}(U)$. Dann gilt

$$A^G = K(Y)^G \cap A = K(X) \cap A = B,$$

wobei die erste Gleichheit klar ist, die zweite Gleichheit unsere Voraussetzung ist und die dritte Gleichheit daraus folgt, daß man $A$ mit der Normalisierung von $B$ in $K(Y)$ identifizieren kann, i.e.

$$\begin{aligned} K(X) \cap A &= K(X) \cap \{x \in K(Y) |\, x \text{ ganz über } B\} \\ &= \{x \in K(X) |\, x \text{ ganz über } B\} = B. \end{aligned}$$

$\square$

[8]es gilt immer $|G| \leq |Aut_{K(X)}(K(Y))| \leq [K(Y) : K(X)]$. Gleichheit impliziert insbesondere $G = Aut_{K(X)}(K(Y))$.

### 1.2.12 Vergleichssätze

**Lemma 1.2.13.** *Es sei $\pi : Y \to X$ ein Morphismus zwischen glatten Varietäten*[9] *über* $\mathbb{C}$.

*(i) $\pi$ ist genau dann surjektiv, wenn $\pi^{\mathrm{an}}$ surjektiv ist.*

*(ii) $\pi$ ist genau dann étale, wenn $\pi^{\mathrm{an}}$ ein lokaler Isomorphismus ist.*

*(iii) $\pi$ ist genau dann quasi-endlich, wenn $\pi^{\mathrm{an}}$ quasi-endlich ist (i.e. in beiden Fällen sind die Fasern endliche Mengen).*

*(iv) $\pi$ ist genau dann eigentlich, wenn $\pi^{\mathrm{an}}$ eigentlich ist (wir nennen einen Morphismus zwischen Mannigfaltigkeiten eigentlich, wenn Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind).*

*Insbesondere ist $\pi$ genau dann eine algebraische Überlagerung*[10]*, wenn $\pi^{\mathrm{an}}$ eine endliche topologische Überlagerung ist.*

*Beweis.* (i) Siehe [Gro61], XII, Prop. 3.2.[11]
(ii) Siehe [Mum88], Seite 182, Cor. 2.
(iii) Klar.
(iv) Siehe [Gro61], XII, Prop.3.2. □

**Satz 1.2.14.** —- `Riemannscher Existenzsatz:` *Es sei $X$ eine glatte Varietät über $\mathbb{C}$. Der Funktor*

$$\begin{aligned}(\textit{Überlagerungen von } X) &\to (\textit{endliche Überlagerungen von } X^{\mathrm{an}} = X(\mathbb{C}))\\ (Y,\pi) &\mapsto (Y^{\mathrm{an}}, \pi^{\mathrm{an}})\end{aligned}$$

*ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

*Beweis.* siehe [Gro61], XII, Thm. 5.1. □

Man folgert leicht

**Korollar 1.2.15.** *Es sei $G$ eine endliche Gruppe, $X$ eine glatte Varietät über $\mathbb{C}$. Der Funktor schränkt sich zu einer Äquivalenz von Kategorien*

$$(G\textit{-Galoisüberlagerungen von } X) \to (G\textit{-Galoisüberlagerungen von } X^{\mathrm{an}})$$

*ein.*

[9] $X, Y$ müssen nicht notwendig irreduzibel sein. $\pi$ ist schon separiert.
[10] beachte für Morphismen von Schemata: endlich=quasi-endlich+eigentlich
[11] in der Proposition und der davor findet man eine sehr ausführliche Auflistung von Eigenschaften, die sich übertragen.

*Beweis.* Nach Satz 1.2.14 gilt für eine Überlagerung $p : Y \to X$ von glatten komplexen Varietäten, daß $G = Aut_X(Y) = Aut_{X^{\mathrm{an}}}(Y^{\mathrm{an}})$, und es gilt $|p^{-1}(x)| = |(p^{\mathrm{an}})^{-1}(x)|$ für $x \in X(\mathbb{C})$. Also folgt die Aussage mit Eigenschaften 1.1.5, Bemerkung 1.2.10 und Satz 1.2.4. □

### 1.2.16 Gibt es zu jeder endlichen Gruppe eine Galoisüberlagerung?

Es sei $G$ eine endliche Gruppe. Gibt es eine projektive glatte Varietät $X$ über $\mathbb{C}$, so daß $G$ Quotient der Fundamentalgruppe von $X^{\mathrm{an}}$ ist? Es reicht zu zeigen, daß jede freie (nichtkommutative) Gruppe mit endlich vielen Erzeugern als Quotienten auftauchen. Es sei $X$ eine projektive glatte Kurve vom Geschlecht $g$. Dann ist $X^{\mathrm{an}}$ eine Henkelfläche mit $g$ Löchern. Die Fundamentalgruppe von $X^{\mathrm{an}}$ (mit beliebigem Basispunkt) erhält man wie folgt: Es sei $F_{2g}$ die freie Gruppe in den $2g$ Erzeugern $a_1, \dots a_g, b_1, \dots b_g$, $c_g := a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$, $N_g := \{u c_g u^{-1} |\ u \in F_{2g}\}$. Dann ist

$$\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x) = F_{2g}/N_g,$$

siehe [Ful95], Kap. 17c) auf Seite 242. Offensichtlich faktorisiert die Abbildung $F_{2g} \twoheadrightarrow F_g$, die $a_i = b_i$ setzt, über $\pi_1(X^{\mathrm{an}}, x) \twoheadrightarrow F_g$.

**Bemerkung 1.2.17.** Es gibt projektive glatte Varietäten mit nur sehr wenigen Galoisüberlagerungen. Es sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Der $n$-dimensionale projektive Raum $\mathbb{P}_k^n$ besitzt nur dir triviale Galoisüberlagerung. Das Gleiche gilt für jede rationale Varietät $X$ (i.e. $K(X)$ ist eine rein transzendente Körpererweiterung von $k$)

(ii) Abelsche Varietäten über $k$ besitzen nur abelsche Galoisüberlagerungen.

*Beweis.* Die Galoisgruppen einer Varietät über $k$ bilden ein projektives System. Der projektive Limes wird algebraische Fundamentalgruppe genannt und liefert die Galoisgruppen als Quotienten zurück. Es gilt (i) die algebraische Fundamentalgruppe vom $\mathbb{P}_k^n$ oder einer eigentlichen normalen rationalen Varietät ist Null, siehe [Gro61], XI, Prop.1.1 und Prop.1.2.
(ii) Es gilt der Satz (von Serre-Lang), siehe [Gro61], XI, Thm.2.1. Er besagt, daß man die algebraische Fundamentalgruppe kanonisch mit dem Tatemodul identifizieren kann, insbesondere ist sie damit kommutativ. □

## 1.3 Degeneration von Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenzen

Es sei $E_1^{pq} \Rightarrow E^n$ die in Abschnitt 1.1.11 eingeführte Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenz für ein Vektorbündel mit integrierbaren Zusammenhang auf einem Schema von endlichem Typ über $\mathbb{C}$ oder einer komplexen Mannigfaltigkeit. Dann gilt (wie für jede Spektralsequenz im ersten Quadranten)

**Bemerkung 1.3.1.** Es gilt immer

$$\sum_{p+q=n} \dim E_1^{pq} \geq \dim E^n,$$

und Gleichheit für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist äquivalent zur Degeneration in $E_1$. (Da es sich nach Voraussetzung um eine Spektralsequenz im ersten Quadranten handelt, gibt es für jedes $(p,q)$ ein $n$, so daß $E_n^{pq} = E_{n+1}^{pq} = \cdots =: E_\infty^{pq}$ gilt. Da wir in jeder Schicht zu einem Subquotienten übergehen, gilt $\dim E_1^{pq} \geq \dim E_2^{pq} \geq \cdots \geq \dim E_\infty^{pq}$. Summieren über alle $p+q=n$ liefert die Behauptung)

Das folgende Ergebnis ist bekannt.

**Satz 1.3.2.** *Es sei $Y$ eine eigentliche glatte Varietät über $\mathbb{C}$. Dann degeneriert die Hodge nach de Rham Spektralsequenz für $(\mathcal{O}_Y, d)$ in $E_1$.*

*Beweis.* Siehe zum Beispiel [Ill96], Theorem 6.9 auf Seite 152. □

Wir nehmen nun folgende Situation an: Es sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung eigentlicher glatter Varietäten über $\mathbb{C}$. Dann ist $(\mathcal{A}, \nabla) := (\pi_* \mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)$ ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul mit integrierbarem Zusammenhang. Da $\pi$ endlich, also insbesondere $\pi_*$ exakt ist, folgt aus Satz 1.3.2 und mit 1.3.1, daß die Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenz für $(\mathcal{A}, \nabla)$ bei $E_1$ degeneriert. Nun nehmen wir an $(\mathcal{A}, \nabla) = \bigoplus_{i=1}^s (\mathcal{A}_i, \nabla_i)$, wobei $\mathcal{A}_i$ wieder lokal freie $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln mit integrierbarem Zusammenhang $\nabla_i$ sind. Es gilt

**Lemma 1.3.3.** *Die Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenzen für $(\mathcal{A}_i, \nabla_i)$, $1 \leq i \leq s$ degenerieren in $E_1$.*

*Beweis.* Es sei $(E, \nabla)$ ein lokal freien $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul mit integrierbarem Zusammenhang. Wir setzen $h^n_{dR}(E,\nabla) := \dim \mathbb{H}^n(E,\nabla)$ und $h^{pq}(E) := \dim \mathrm{H}^q(X, E\otimes\Omega^p_X)$, dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s} h^n_{dR}(\mathcal{A}_i,\nabla_i) &= h^n_{dR}(\mathcal{A},\nabla)\\ &= \sum_{p+q=n} h^{pq}(\mathcal{A})\\ &= \sum_{p+q=n}\sum_{i=1}^{s} h^{pq}(\mathcal{A}_i)\\ &= \sum_{i=1}^{s}(\sum_{p+q=n} h^{pq}(\mathcal{A}_i)).\end{aligned}$$

Aber nach Bemerkung 1.3.1 gilt $\sum_{p+q=n} h^{pq}(\mathcal{A}_i) \geq h^n_{dR}(\mathcal{A}_i,\nabla_i)$, $1\leq i\leq s$, also $\sum_{p+q=n} h^{pq}(\mathcal{A}_i) = h^n_{dR}(\mathcal{A}_i,\nabla_i)$, $1\leq i\leq s$ und wieder mit Bemerkung 1.3.1 ist die Behauptung gezeigt. □

## 1.4 Lokale Systeme

**Definition 1.4.1.** —- `lokales System:` Es sei $X$ ein topologischer Raum. Ein *lokales System* vom Rang $r$ ist ein lokal freier $\mathbb{C}_X$-Modul vom Rang $r$, wobei wir mit $\mathbb{C}_X$ die konstante Garbe $\mathbb{C}$ auf $X$ bezeichnen.

### 1.4.2 Lokale Systeme und integrierbare Zusammenhänge

**Satz 1.4.3.** *Es sei $X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit. Wir haben eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\textit{lokale Systeme vom}\\ \textit{Rang } r \textit{ auf } X\end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix}\textit{Holomorphe Vektorbündel vom Rang } r \textit{ mit}\\ \textit{integrierbaren Zusammenhang auf } X\end{pmatrix}\\ \mathcal{E} &\longrightarrow (E = \mathcal{E}\otimes_{\mathbb{C}_X}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}, \nabla_{\mathcal{E}} \textit{ mit } \mathcal{E} = \ker\nabla_{\mathcal{E}})\\ \ker\nabla &\longleftarrow (E,\nabla)\end{aligned}$$

*und es gilt*

$$0\to\mathcal{E}\to E\xrightarrow{\nabla}\Omega^1_X\otimes E\to\cdots\to\Omega^{\dim X}_X\otimes E\to 0$$

*ist exakt, also insbesondere*

$$\mathrm{H}^i(X,\mathcal{E}) = \mathbb{H}^i(E,\nabla)$$

*Beweis.* Siehe [Del70], Kapitel I, Prop. 2.16, Thm. 2.17 und Prop. 2.18 □

**Bemerkung 1.4.4.** Der Beweis der Exaktheit beruht auf dem als Lemma von Poincaré bekannten Spezialfall $\mathcal{E} = \mathbb{C}_X$.

**Eigenschaften 1.4.5.** *Es sei $X$ eine komplexe Mannigfaltigkeit. Wir definieren $\oplus$, $\otimes$, $\pi^*$, $\pi_*$ von Zusammenhängen. Gegeben zwei lokal freie $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln mit integrierbaren Zusammenhängen, $(E,\nabla),(E',\nabla')$, die zu lokalen Systeme $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ korrespondieren.*

- $\oplus$ *Man definiert $(E,\nabla)\oplus(E',\nabla')$ als das zu $\mathcal{E}\oplus\mathcal{E}'$ korrespondierende Vektorbündel mit integrierbaren Zusammenhang. Man kann die direkte Summe als die direkte Summe der beiden Komplexe mit der Identifizierung $(E\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}\Omega^p_X)\oplus(E'\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}\Omega^p_X)\cong(E\oplus E')\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}\Omega^p_X$ für alle $p\in\mathbb{N}_0$ beschreiben.*

- $\otimes$ *Man definiert $(E,\nabla)\otimes(E',\nabla')$ als das zu $\mathcal{E}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{E}'$ korrespondierende Vektorbündel mit integrierbaren Zusammenhang. Es gilt $(E,\nabla)\otimes(E',\nabla')=(E\otimes E',\nabla\otimes\nabla')$, wobei $\nabla\otimes\nabla'$ der in Bemerkung 1.1.10 definierte Tensorzusammenhang ist.*

- $\pi^*$ *Es sei $\pi : Y\to X$ ein Morphismus komplexer Mannigfaltigkeiten. Wir definieren $\pi^*(E,\nabla)$ als das zu $\pi^{-1}\mathcal{E}$ korrespondierende Vektorbündel mit integrierbarem Zusammenhang. Man rechnet nach $\pi^{-1}\mathcal{E}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}\cong\pi^*E$.*

- $\pi_*$ *Es sei $\pi : X\to Z$ eine endliche Überlagerung komplexer Mannigfaltigkeiten. Wir definieren $\pi_*(E,\nabla)$ als das zu $\pi_*\mathcal{E}$ korrespondierende Vektorbündel mit integrierbarem Zusammenhang. Es gilt $\pi_*(E,\nabla)=(\pi_*E,\pi_*\nabla)$ ist einfach die Einschränkung von $(E,\nabla)$ auf offene Mengen der Form $\pi^{-1}(U)$ mit $U\subset Z$ offen.*

### 1.4.6 Monodromie

Wir beginnen damit, das folgende Ergebnis aus dem Anhang *Was ist eine G-Garbe? -topologisch*[12] zu zitieren.

**Satz 1.4.7.** *Es sei $\pi : Y\to X$ eine topologische $G$-Galoisüberlagerung. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*[13]

$$\begin{pmatrix}\pi^{-1}\text{-triviale lokale Systeme}\\ \text{auf } X\text{, vom Rang } r\end{pmatrix}\longleftrightarrow\begin{pmatrix}\text{Freie } \mathbb{C}_Y\text{-Moduln vom Rang } r \text{ mit}\\ \mathbb{C}\text{-linearer } G\text{-Garbenstruktur}\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{E} & \longrightarrow & (\pi^{-1}\mathcal{E},(\phi_g)_{g\in G})\\ (\pi_*\mathcal{F})^{G,(\phi)} & \longleftarrow & (\mathcal{F},(\phi_g)_{g\in G}).\end{array}$$

*Beweis.* Siehe Satz 5.1.3 und Korollar 5.1.7. □

[12] Kurze Erinnerung: Es sei $Y$ topologischer Raum, auf dem eine Gruppe $G$ operiert. Eine $G$-Garbe ist eine Garbe $F$ auf $Y$ zusammen mit $\phi_g : g^{-1}F\to F$, so daß $\phi_{gh}=\phi_h\circ h^{-1}(\phi_g)$ für $g,h\in G$ gilt.

[13] Wir nennen ein lokales System $\mathcal{E}$ $\pi^{-1}$-trivial, falls $\pi^{-1}\mathcal{E}\cong\mathbb{C}^r_Y$ für ein $r\in\mathbb{N}$ gilt.

**Lemma 1.4.8.** *Es sei $Y$ ein zusammenhängender topologischer Raum, $G$ eine Gruppe, die durch Automorphismen auf $Y$ operiert. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{pmatrix}\textit{Freie } \mathbb{C}_Y\textit{-Moduln vom Rang } r \textit{ mit}\\ \mathbb{C}\textit{-linearer } G\textit{-Garbenstruktur}\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\textit{Darstellungen } G \to Gl(V) \textit{ mit}\\ V \textit{ ist } r\textit{-dim. } \mathbb{C}\textit{-Vektorraum}\end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{F}, (\phi_g)_{g\in G}) \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix}\rho : G \to Gl(\mathcal{F}(Y))\\ \rho_g := (\phi_g(Y))^{-1}\end{pmatrix}$$

*Beweis.* Es sei $(\mathcal{F}, (\phi_g)_{g\in G})$ wie in der Behauptung. Da $Y$ zusammenhängend ist, ist $\mathcal{F}(Y)$ ein $r$-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Für $g \in G$ definiert $\phi_g(Y) : \mathcal{F}(gY) = \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(Y)$ einen Vektorraumautomorphismus. Die $G$-Garbenbedingung $\phi_{gh} = \phi_h \circ h^{-1}(\phi_g)$ für alle $g, h \in G$ besagt, daß $G \to Gl(\mathcal{F}(Y)),\ g \mapsto (\phi_g(Y))^{-1}$ einen Gruppenhomomorphismus ist.

Andersherum sei $\rho : G \to Gl(V)$ eine $r$-dimensionale Darstellung von $G$. Wir definieren $\mathcal{F}$ als die konstante Garbe $V$. Für $g \in G$ definieren wir $\psi_g$ für $U \subset Y$ offen und zusammenhängend durch

$$\psi_g(U) : g^{-1}\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(gU) \xrightarrow{id_V} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho_g^{-1}} \mathcal{F}(U).$$

Da $\rho$ ein Gruppenhomomorphismus ist, ist $(\phi_g)_{g\in G}$ eine $G$-Garbenstruktur.

Offensichtlich liefert die zu einer Darstellung definierte $G$-Garbe über die inversen globalen Schnittmorphismen die Darstellung zurück. Betrachtet man andererseits eine $G$-Garbe $(\mathcal{F}, (\phi_g)_{g\in G})$ wie in der Behauptung, und ist $\rho : G \to Gl(\mathcal{F}(Y))$ die zugehörige Darstellung, so stimmt die zu $\rho$ definierte $G$-Garbenstruktur $(\psi_g)_{g\in G}$ mit $(\phi_g)_{g\in G}$ überein, denn für $g \in G$ ist $\psi_g^{-1} \circ \phi_g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ein $\mathbb{C}$-linearer Garbenmorphismus, der auf globalen Schnitten die Identität ist. Nun verifiziert man aber sehr leicht $Aut_{\mathbb{C}_Y}(\mathcal{F}) \cong Gl(V)$, also ist $\psi_g = \phi_g$. □

Durch Verknüpfung der im vorigen Lemma und im vorigen Satz definierten Funktoren erhalten wir unmittelbar

**Satz 1.4.9.** —*-Monodromie-Korrespondenz: Gegeben eine topologische $G$-Galoisüberlagerung $\pi : Y \to X$. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{pmatrix}\pi^{-1}\textit{-triviale lokale Systeme}\\ \textit{auf } X \textit{ vom Rang } r\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\textit{Darstellungen } G \to Gl(V) \textit{ mit}\\ V \textit{ ist } r\textit{-dimensionaler } \mathbb{C}\textit{-Vektorraum}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E}_\rho \quad \longleftarrow \quad \rho$$

**Bemerkung 1.4.10.** Gegeben eine Darstellung $\rho : G \to Gl(V)$, wie können wir das zugehörige lokale System $\mathcal{E}_\rho$ beschreiben?
Sei $W \subset Y$ offen, $g \in G$. Dann können wir die zugeordnete Abbildung $\phi_g(W)$ wie folgt beschreiben

$$\{gW \xrightarrow{f} V |\ f \text{ lok. konst}\} \to \{W \xrightarrow{h} V |\ h \text{ lok. konst.}\}$$
$$f \mapsto \rho_g^{-1} \circ f \circ g.$$

Das sieht man dadurch, daß die Abbildung auf den Halmen durch Multiplikation mit $\rho_g^{-1}$ gegeben sein muss. Sieht man die Garben als ihre eigenen Garbifizierungen an, braucht man die Abbildung nur auf den Halmen zu kennen. Insbesondere folgt für $U \subset X$ offen

$$\mathcal{E}_\rho(U) = \{\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sigma} V | \ \sigma \text{ lok. konst.}, \sigma \circ g = \rho_g \circ \sigma \ \forall g \in G\}$$

**Bemerkung 1.4.11.** (i) Üblicherweise definiert man wie im letzten Satz die Monodromie-Korrespondenz für die universelle Überlagerung $\widetilde{X}$, weil man für sie zeigen kann, daß alle lokalen Systeme auf sie zurückgezogen trivial werden, siehe [Voi03], Kapitel 3.1. Das heißt bis auf Isomorphie entsprechen lokale Systeme auf $X$ Darstellungen der Fundamentalgruppe bis auf Konjugation. Geben wir jetzt wieder eine beliebige $G$-Galoisüberlagerung $Y$ vor, so entsprechen den lokalen Systemen, die auf $Y$ trivial werden, gerade die Darstellungen der Fundamentalgruppe, die über $G$ faktorisieren.

(ii) Wir definieren lokale Systeme nur mit Halm $\mathbb{C}^r$, da wir die Monodromie-Darstellung zusammen mit dem vorherigen Ergebnis siehe Satz 1.4.3 benutzen möchten. Es gilt eine zu Satz 1.4.9 analoge Aussage für lokale System mit Halm $M$, wobei $M$ ein Modul über einem Ring ist.

# 2 ad A):Über Hodgezahlen von Torsionsgeradenbündeln

Der Beweis beruht auf der folgenden Konstruktion, die man in [EV92] ab Seite 22 finden kann.

## 2.1 Die zyklische Überlagerung

Sei $X$ eine eigentliche glatte Varietät über $\mathbb{C}$, $L$ ein Geradenbündel auf $X$ zusammen mit einem Isomorphismus $s : L^{\otimes n} \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ minimal, so daß so ein Morphismus existiert.

**Definition 2.1.1.** —- `Die Konstruktion:`
$\mathcal{A} := \bigoplus_{i=0}^{n-1} L^{\otimes i}$ ist eine kohärente kommutative $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Algebra (der Strukturmorphismus $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \to \mathcal{A}$ ist die Inklusion in den ersten Summanden, die Multiplikation ist die kanonische Abbildung $L^{\otimes i} \times L^{\otimes j} \to L^{\otimes i+j}$, falls $i + j \leq n - 1$ und für $i + j \geq n$ die Verknüpfung $L^{\otimes i} \times L^{\otimes j} \to L^{\otimes i+j} \xrightarrow{s \otimes id} L^{\otimes i+j-n}$). Dann gibt es (genau) ein Schema $Y := \operatorname{Spec} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} X$, so daß für offene affine Teilmengen $U \subset V \subset X$ gilt $\pi^{-1}(U) = \operatorname{Spec} \mathcal{A}(U)$ und die Inklusion $\pi^{-1}(U) \hookrightarrow \pi^{-1}(V)$ der Morphismus $\operatorname{Spec}(\mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(U))$ ist, siehe [Har77] Seite 128. $Y$ heißt/ist eine $\underline{n\text{-te Wurzel aus } L}$ (vermöge $s$). Das Paar $(Y, \pi)$ heißt im folgenden zyklische Überlagerung.

**Lemma 2.1.2.** —- `elementare Eigenschaften:`
*Sei $(Y, \pi)$ wie vorher, dann gilt*

*(i) $Y$ ist nullteilerfrei, $\pi$ ist endlich, étale und $[K(Y) : K(X)] = n$ (insbesondere ist $\pi$ glatt und somit $Y \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ glatt).*

*(ii) $\operatorname{Aut}_X(Y) = \mu_n$, und insbesondere ist $\pi$ eine $\mu_n$-Galoiserweiterung.*

**Beweis:** (i) Lokal: $U = \operatorname{Spec} B$ offene Teilmenge in $X$, $\Gamma(U, L|_U) = B \cdot t$, $s|_U : B \cdot t^n \to B, t^n \mapsto b$, $f := t^n - b \in B[t]$. Dann gilt $\mathcal{A}(U) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} B \cdot t^i = B[t]/(t^n - b)$ ist freier $B$-Modul vom Rang $n$ und $\pi$ endlich. $s$ bijektiv liefert $b \in B^*$, also gilt $(f, f') = B[t]$ und $\operatorname{Spec}(B \to B[t]/(f))$ ist Standard-étale. Es gilt: $b$ ist nicht von der Form $a^m$ für ein $a \in B, a \neq b,\ m = \frac{n}{k} \in \mathbb{N}$.
Denn angenommen es gelte $b = a^m$, dann gilt $\frac{b}{1} = (\frac{a}{1})^m \in B_{(0)} = K(X)$. Ist $U' = \operatorname{Spec} B'$ eine affine Karte mit $s|_{U'} : B' \cdot t^n \to B', t^n \mapsto b'$, so gilt $\frac{b'}{1} = \frac{b}{1} = (\frac{a}{1})^m \in K(X)$ und

da $B'$ ganz abgeschlossen in $K(X)$ ist (das folgt aus $X$ glatt), gibt es ein $a' \in B'$ mit $(a')^m = b'$. Dann definiert man $s' : L^{\otimes m} \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ lokal durch $B' \cdot t^m \to B', t^m \mapsto a'$ und erhält einen Widerspruch zur Annahme, daß $n$ die Torsionordnung von $L$ ist.
Damit ist $f = t^n - b \in B[t]$ irreduzibel. Das zeigt $B[t]/(f)$ nullteilerfrei, somit auch $Y$, und $K(Y) = K(X)[t]/(t^n - \frac{b}{1})$ ist eine Körpererweiterung von $K(X)$ vom Grad $n$. Da $\mathbb{C}$ die $n$-ten Einheitswurzeln enthält, ist $K(Y)/K(X)$ normal und somit galoissch.

(ii) $\#\mathrm{Gal}(K(Y)/K(X)) = n$ liefert $\#\mathrm{Aut}_X(Y) \leq n$, da jeder Isomorphismus auch ein birationaler Morphismus ist. Nach Definition von $(Y, \pi)$ gilt $\mathrm{Aut}_X(Y) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}-Alg}(\mathcal{A})$. Also reicht es eine Inklusion von Gruppen $\mu_n \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}-Alg}(\mathcal{A})$ anzugeben. Sei $\xi \in \mu_n$, definiere $\phi_\xi^i : L^{\otimes i} \to L^{\otimes i}$ lokal durch $L^{\otimes i}(U) \to L^{\otimes i}(U), l \mapsto \xi^i \cdot l$, dann ist $\phi_\xi := \bigoplus_{i=0}^{n-1} \phi_\xi^i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ das Gewünschte. $\square$

Für unsere Anwendung betrachten wir als nächstes den de Rham-Komplex unserer zyklischen Überlagerung im Vergleich zu dem des Ursprungsraums.

### 2.1.3 Der de Rham-Komplex der zyklischen Überlagerung

Sei $Y \xrightarrow{\pi} X$ wie oben, und

$$\mathcal{O}_Y \xrightarrow{d} \Omega^1_{Y/\mathbb{C}} \to \dots$$

der de Rham-Komplex von $Y$. Nach Anwenden von $\pi_*$ erhalten wir einen Komplex

$$\pi_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\pi_* d} \pi_*\Omega^1_{Y/\mathbb{C}} \to \dots$$

Da $\pi$ étale ist, gilt $\pi^*\Omega^p_{X/\mathbb{C}} \cong \Omega^p_{Y/\mathbb{C}}$ , siehe [Liu02], Seite 223, und nach Projektionsformel ,siehe [Har77], Seite 124, gibt es einen Isomorphismus

$$\alpha : \pi_*\Omega^p_Y \cong \pi_*(\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi^*\Omega^p_X) \to \pi_*\mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \Omega^p_X \cong \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \Omega^p_X.$$

Der Isomorphismus induziert ein Differential $\nabla := \alpha \circ \pi_*(d_Y) \circ \alpha^{-1}$

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_{X/\mathbb{C}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{A} \to \dots,$$

so daß $\alpha$ ein Isomorphismus von Komplexen ist (wobei $\alpha$ $\pi_*\mathcal{O}_Y$-linear und die Differentiale nur $\mathbb{C}_X$-linear sind). Als nächstes betrachten wir den Isomorphismus $\alpha$ lokal: Sei $U = \mathrm{Spec}\, B$ offene Teilmenge von $X$, $L|_U$ frei erzeugt von $t$, $\mathrm{Spec}\, A = \pi^{-1}(U)$ von der Form $A = B[t]/(t^n - b)$, dann ist der Komplex $\pi_*\Omega^\bullet_Y$ auf $U$ gegeben durch

$$A \xrightarrow{d_A} \Omega^1_{A/\mathbb{C}} \to \dots$$

$$b_i t^i \mapsto d_A(b_i t^i) = b_i d_A t^i + t^i d_A b_i = t^i(\frac{i}{n} b_i b^{-1} d_A b + d_A b_i)^1.$$

[1] für die letzte Gleichheit benutze $dt^i = it^{i-1}dt$ und $dt = \frac{1}{n}(t^{n-1})^{-1}db = \frac{1}{n}b^{-1}tdb$

Es gilt

$$\Omega^1_A \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_B \otimes_B A$$

$$ad_A(b_i t^i) \mapsto (\frac{i}{n} b_i b^{-1} d_B b + d_B b_i) \otimes a t^i$$

und

$$A \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_B \otimes_B A$$

$$b_i t^i \mapsto d_B b_i \otimes t^i + b_i(\frac{i}{n} b^{-1} d_B b \otimes t^i),$$

insbesondere sieht man leicht, daß $\nabla$ ein integrierbarer Zusammenhang im Sinne der Definition 1.0.5 ist.

### 2.1.4 Die Operation der Galoisgruppe auf dem de Rham-Komplex

Wir fixieren $\xi \in \mu_n$, sei $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ der zugehörige Automorphismus. Mit Hilfe der lokalen Definition sieht man, daß $id \otimes \phi : \Omega^p_X \otimes \mathcal{A} \to \Omega^p_X \otimes \mathcal{A}$ mit $\nabla$ kommutiert. Da $id \otimes \phi$ eingeschränkt auf $\Omega^p_X \otimes L^{\otimes i}$ nur Multiplikation mit $\xi^i$ ist und $id \otimes \phi$ ein Morphismus von Komplexen ist. Falls $\xi$ primitiv ist, haben wir eine Eigenraumzerlegung von Komplexen

$$(\Omega^\bullet_X \otimes \mathcal{A}, \nabla) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\Omega^\bullet_X \otimes L^{\otimes i}, \nabla_{L^{\otimes i}}),$$

wobei $\nabla_{L^{\otimes i}}$ lokal durch

$$Bt^i \to \Omega^1_B \otimes_B Bt^i,\ b_i t^i \mapsto d_B b_i \otimes t^i + b_i(\frac{i}{n} b^{-1} d_B b \otimes t^i)$$

definiert ist. Da $\nabla$ ein integrierbarer Zusammenhang ist, ist es auch $\nabla_{L^{\otimes i}}$.

**Bemerkung 2.1.5.** Nach Definition des Tensorzusammenhangs, der in Bemerkung 1.1.10 definiert ist, gilt $\nabla_{L^{\otimes i}} = (\nabla_L)^{\otimes i}$ (Man setzt einfach bei der lokalen Definition $t^i$ ein. Auf beiden Seiten steht $i(\frac{1}{n} b^{-1} db \otimes t^i)$.)

#### Das Zurückziehen von Differentialformen

Der Automorphismus $\sigma = \mathrm{Spec}\,(\phi) \in \mathrm{Aut}_X(Y)$ induziert einen Isomorphismus von Komplexen $\sigma^* : \Omega^\bullet_Y \to \sigma_* \Omega^\bullet_Y$. Ist $\sigma$ lokal durch einen Ringhomomorphismus $s : A \to A'$ gegeben, so definiert man $\sigma^*$ durch $s^* : \Omega^1_A \to \Omega^1_{A'},\ a_1 d_A(a_2) \mapsto s(a_1) d_{A'}(s(a_2))$.
Anwenden von $\pi_*$ liefert einen Automorphismus von Komplexen $\pi_*(\sigma^*) : \pi_* \Omega^\bullet_Y \to \pi_* \sigma_* \Omega^\bullet_Y = \pi_* \Omega^\bullet_Y$. Da $\sigma^{-1}(\pi^{-1}(U)) = \pi^{-1}(U)$ gilt, ist $\sigma$ für $\mathrm{Spec}\, A = \pi^{-1}(\mathrm{Spec}\, B)$ durch einen Ringautomorphismus $\phi : A \to A$ gegeben. Nach Verkleinerung von $\mathrm{Spec}\, B$ können

wir sogar annehmen, daß $\phi : A = B[t]/(t^n - b) \to B[t]/(t^n - b),\ t \mapsto \xi t$ gilt. Dann ist das folgende Diagram kommutativ

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_A & \xrightarrow{\alpha} & \Omega^1_B \otimes_B A \\ \downarrow{\scriptstyle \phi^*} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes\phi} \\ \Omega^1_A & \xrightarrow{\alpha} & \Omega^1_B \otimes_B A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f(t)d_A(b_it^i) & \longmapsto & f(t)\nabla(b_it^i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f(\xi t)d_A(b_i\xi^it^i) & \longmapsto & f(\xi t)\nabla(b_i\xi^it^i) \end{array}$$

Also können wir den Isomorphismus $\pi_*(\sigma^*)$ via $\alpha$ mit $id \otimes \phi$ identifizieren.

### 2.1.6 Die de Rham-Kohomologie der zyklischen Überlagerung

Es sei $(Y, \pi)$ die zyklische Überlagerung aus Definition 2.1.1.

Es sei $\xi \in \mu_n$, $\sigma_\xi = \operatorname{Spec}\phi_\xi : Y \to Y$. Dann haben wir einen Isomorphismus von Komplexen $\sigma_\xi^* : \Omega^\bullet_Y \to (\sigma_\xi)_*\Omega^\bullet_Y$, und es gilt $\pi_*(\sigma_\xi^*) = id \otimes \phi_\xi$ (siehe 2.1.4). Durch die Funktorialität von $\mathbb{H}^i$ erhalten wir einen Isomorphismus $\mathbb{H}^i(\pi_*\sigma_\xi^*) : \mathbb{H}^i(\pi_*\Omega^\bullet_Y) \to \mathbb{H}^i(\pi_*\Omega^\bullet_Y)$.

**Lemma 2.1.7.** —`Die Eigenraumzerlegung:` *Für $j \geq 0$ gilt*

$$\mathbb{H}^j(\pi_*\Omega^\bullet_{Y/\mathbb{C}}) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{H}^j(\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}} \otimes L^{\otimes i}) =: \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{H}^j(L^{\otimes i}, \nabla_{L^{\otimes i}}),$$

*und falls $\xi \in \mu_n$ primitiv ist, gilt*

$$\mathbb{H}^j(L^{\otimes i}, \nabla_{L^{\otimes i}}) = Eig(\mathbb{H}^j(\pi_*\sigma_\xi^*), \xi^i).$$

**Beweis:** Sei $q : \Omega^\bullet_X \otimes L^{\otimes i} \to I^\bullet_i$ ein Quasi-Isomorphismus in einen $\Gamma$- azyklischen Komplex. Da $id \otimes \phi^i_\xi$ nur die Multiplikation mit $\xi^i$ ist und $q$ $\mathbb{C}$-linear ist, haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Omega^\bullet_X \otimes L^{\otimes i} & \xrightarrow{q} & I^\bullet_i \\ \downarrow{\scriptstyle id\otimes\phi^i_\xi} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot\xi^i} \\ \Omega^\bullet_X \otimes L^{\otimes i} & \xrightarrow{q} & I^\bullet_i \end{array}.$$

Damit ist eine (wegen Quasi-Isomorphismus eindeutige) induzierte Abbildung auf der Kohomologie des Komplexes der globalen Schnitte ebenfalls Multiplikation mit $\xi^i$.

□

## 2.2 Der Satz von Pink und Rössler

Nach der ausführlichen Vorarbeit kommen wir zum angekündigten Ergebnis

**Satz 2.2.1.** *Es sei $X$ eine eigentliche glatte Varietät über $\mathbb{C}$, $L \in Pic^0(X)[n]$. Dann gilt für alle $a, i \in \mathbb{N}_0$, $(a,n) = 1$*

$$h^i_{Hdg}(L) = h^i_{Hdg}(L^{\otimes a})$$

**Beweis:** Nach 1.3 können wir das Subskript $Hdg$ durch $dR$ ersetzen. Wir können annehmen, daß $n$ die minimale Torsionsordnung von $L$ ist, sonst ersetzen wir $n$ durch diese. Sei $(Y, \pi)$ wieder die zyklische Überlagerung. Für $\xi \in \mu_n$ primitiv definieren wir $\mathcal{A} \xrightarrow{\phi_\xi} \mathcal{A}$, $\sigma := \sigma_\xi = \mathrm{Spec}\,(\phi_\xi)$ wie vorher. Angenommen, es gibt einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum $W$ und einen ($\mathbb{C}$-Vektorraum-) Isomorphismus $\kappa : \mathbb{H}^i(\pi_*\Omega^\bullet_Y) \to W \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, so daß sich der Isomorphismus als $\mathbb{H}^i(\pi_*(\sigma^*)) = \kappa^{-1}(f \otimes id_{\mathbb{C}})\kappa$ für ein $\mathbb{Q}$-lineares $f : W \to W$ schreiben läßt. Wir definieren $V_j := Eig(f \otimes id, \xi^j)$ (nach Annahme isomorph zu $\mathbb{H}^i(L^{\otimes j}, \nabla_{L^{\otimes j}})$), sei $\tau \in Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ mit $\tau(\xi) = \xi^a$ für $(a,n) = 1$, dann gilt offensichtlich

$$(id_W \otimes \tau) \circ (f \otimes id_{\mathbb{C}}) = (f \otimes id_{\mathbb{C}}) \circ (id_W \otimes \tau)$$

und damit ist $V_1 \xrightarrow{id \otimes \tau} V_a$ ein ($\mathbb{Q}$-linearer) Isomorphismus, denn: Für $v \in V_1$ gilt

$$f \otimes id(id \otimes \tau(v)) = id \otimes \tau(f \otimes id(v)) = id \otimes \tau(\xi v) = \xi^a id \otimes \tau(v),$$

also ist $(id \otimes \tau)(v) \in V_a$. Genauso zeigt man $v \in V_a$ impliziert $(id \otimes (\tau^{-1}))(v) \in V_1$. Somit haben wir einen $\tau$-linearen Isomorphismus $V_1 \to V_a$[2]. Somit für $(a,n) = 1$

$$h^i_{dR}(L, \nabla_L) = \dim_{\mathbb{C}} V_1 = \dim_{\mathbb{C}} V_a = h^i_{dR}(L^{\otimes a}, \nabla_{L^{\otimes a}}).$$

Den nächsten Abschnitt widmen wir der Existenz von $W$ und $f$ wie oben. Vorschau: Wir zeigen, daß es ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^i(\pi_*\Omega^\bullet_Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathbb{H}^i(\pi_*\sigma^*)"'] \arrow[dr, phantom, "\boxed{1}"] & \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_Y) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathbb{H}^i(\sigma^*)"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{2}"] & \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}) \arrow[r, "\gamma^{-1}"] \arrow[d, "\mathbb{H}^i((\sigma^{\mathrm{an}})^*)"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{3}"] & \mathrm{H}^i(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{H}^i(\sigma^*_{\mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}})"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{4}"] & \mathrm{H}^i(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \arrow[d, "\mathrm{H}^i(\sigma^*_{\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathrm{id}"] \\
\mathbb{H}^i(\pi_*\Omega^\bullet_Y) \arrow[r, "\alpha"'] & \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_Y) \arrow[r, "\beta"'] & \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}) \arrow[r, "\gamma^{-1}"'] & \mathrm{H}^i(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}) \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{H}^i(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

gibt, in dem $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ Isomorphismen (von $\mathbb{C}$-Vektorräumen) sind.

- $\boxed{1}$ ist die Invarianz der Hyperkohomologie unter $\pi_*$ mit $\pi$ endlich,
- $\boxed{2}$ ist Übergang zur Analytifizierung, siehe Kapitel 1,
- $\boxed{3}$ ist eine Folgerung aus dem Lemma von Poincaré und
- $\boxed{4}$ ist die Exaktheit von $- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$.

[2] eine additive Abbildung von $\mathbb{C}$-Vektorräumen $F : V \to W$ heißt $\tau$-linear, falls $F(\lambda v) = \tau(\lambda) F(v)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}, v \in V$ gilt. Ist $F : V \to W$ $\tau$-linear und bijektiv, folgt $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} W$.

## 2.3 Die vier kommutativen Diagramme

Wenn keine weiteren Angaben gemacht werden, ist in diesem Abschnitt immer $(Y, \pi)$ wie in 2.1.1, $\sigma$ wie in 2.1.2 definiert.

### 2.3.1 Das erste Diagramm

$\boxed{1}$ Invarianz unter $\pi_*$.

#### Von der Čech- über die Garben- zur De Rham-Kohomologie

Sei $\mathcal{V}$ eine offene affine Überdeckung von $X$, $\mathcal{U} = \pi^{-1}\mathcal{V}$ die Überdeckung von $Y$ mit den Urbildmengen von $\mathcal{V}$ unter $\pi$. Für $V \in \mathcal{V}$, $\pi^{-1}(V) = U$ induziert das Zurückziehen von Differentialen entlang $\sigma$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_*\Omega^\bullet_Y(V) \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\pi_*(\sigma^*)"'] & \Omega^\bullet_Y(U) \arrow[d, "\sigma^*"] \\
\pi_*\Omega^\bullet_Y(V) \arrow[r, "id"] & \Omega^\bullet_Y(U)
\end{tikzcd}$$

das liefert ein kommutatives Diagramm (von Doppelkomplexen) in der Čech-Kohomologie bzgl. der Überdeckungen $\mathcal{V}, \mathcal{U}$

$$\begin{tikzcd}
\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{V}, \pi_*\Omega^p_Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\check{\mathrm{H}}^q(\pi_*(\sigma^*))"'] & \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_Y) \arrow[d, "\check{\mathrm{H}}^q(\sigma^*)"] \\
\check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{V}, \pi_*\Omega^p_Y) \arrow[r, "\alpha"] & \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_Y)
\end{tikzcd}$$

da die Überdeckung durch affine offene Mengen azyklisch für $\Gamma$ ist, ist die Čech-Kohomologie kanonisch isomorph zur Garbenkohomologie (siehe [Har77], Seite 222). Das ist aber nichts anderes als ein Morphismus (von Komplexen) zwischen den $E_1^{pq}$-Termen der Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenz. Dieser setzt sich funktoriell auf den $E^n$-Term fort[3] und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^i(\pi_*\Omega^\bullet_Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathbb{H}^i(\pi_*\sigma^*)"'] & \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_Y) \arrow[d, "\mathbb{H}^i(\sigma^*)"] \\
\mathbb{H}^i(\pi_*\Omega^\bullet_Y) \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_Y)
\end{tikzcd}$$

[3] die Fortsetzung auf die $\infty$-Terme ist klar. Beim Übergang zu den $E^n$-Termen kann man die Degeneration der Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenz benutzen

### 2.3.2 Das zweite Diagramm

$\boxed{2}$ Übergang zur Analytifizierung. Wir vergleichen das Zurückziehen von Differentialformen algebraisch und analytisch.

#### Das Zurückziehen von Differentialformen algebraisch und analytisch

Für einen Ringhomomorphismus $s : A \to A'$ haben wir $s^* : \Omega^1_A \to \Omega^1_{A'},\ a_1 d_A(a_2) \mapsto s(a_2)d_{A'}(s(a_2))$. Sei nun $\sigma = \mathrm{Spec}\,(s) : U' = \mathrm{Spec}\,A' \to \mathrm{Spec}\,A = U$ dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "s"] & \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist regulär}\} \arrow[d] & f \arrow[d, mapsto] \\ A' \arrow[r] & \{f : \sigma^{-1}(U) \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist regulär}\} & f \circ \sigma \end{tikzcd}$$

und wir identifizieren $s^*$ in diesem Abschnitt als $fdg \mapsto (f \circ \sigma)d(g \circ \sigma)$.

Sei nun $\sigma^{\mathrm{an}} : Y^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ ein Morphismus. Wir definieren $\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}} \to (\sigma^{\mathrm{an}})_*\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$ durch $f \mapsto f \circ \sigma^{\mathrm{an}}$, ebenso definieren wir das Zurückziehen holomorpher Differentialformen via

$$\sigma^{\mathrm{an}*} : \Omega^1_{Y^{\mathrm{an}}} \to {\sigma^{\mathrm{an}}}_*\Omega^1_{Y^{\mathrm{an}}} \text{ lokal durch } fd^{\mathrm{an}}g \mapsto (f \circ \sigma^{\mathrm{an}})d^{\mathrm{an}}(g \circ \sigma^{\mathrm{an}}).$$

Sei nun $\sigma : Y \to Y$ ein Morphismus. Fassen wir $\sigma$ als in der analytischen Topologie stetige Funktion $\sigma^{\mathrm{an}} : Y^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ auf (d.h. $\sigma\phi = \phi\sigma^{\mathrm{an}}$, wobei $\phi : (X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}) \to (X, \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ die in Abschnitt 1.1.2 definierte Abbildung lokal geringter Räume ist). Wir erhalten ein kommutatives Diagramm von Komplexen

$$\begin{tikzcd} \Omega^\bullet_Y \arrow[r] \arrow[d, "\sigma^*"] & \phi_*\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}} \arrow[d, "\phi_*(\sigma^{\mathrm{an}*})"] \\ \sigma_*\Omega^\bullet_Y \arrow[r] & \phi_*{\sigma^{\mathrm{an}}}_*\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}} \end{tikzcd}$$

#### Diagramm $\boxed{2}$ in der Čech-,Garben-,Hyperkohomologie

Dies läuft vollständig analog zum Beweis für das erste Diagramm ab. Seien nun $Y \xrightarrow{\pi} X, Y \xrightarrow{\sigma} Y$ wie im Satz von Pink und Rössler definiert, $\mathcal{V}$ sei eine offene affine Überdeckung von $X$, $\mathcal{U} = \pi^{-1}(\mathcal{V})$ die offene Überdeckung von $Y$ mit den Urbildern unter $\pi$, $\mathcal{U}^{\mathrm{an}} = \phi^{-1}(\mathcal{U})$ sei die entsprechende Überdeckung in der analytischen Topologie. Für $U \in \mathcal{U}$ haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Omega^\bullet_Y(U) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\sigma^*"'] & \Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}(U^{\mathrm{an}}) \arrow[d, "\sigma^{\mathrm{an}*}"] \\ \Omega^\bullet_Y(U) \arrow[r, "\beta"] & \Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}(U^{\mathrm{an}}) \end{tikzcd}$$

das induziert ein kommutatives Diagramm (von Doppelkomplexen) in der Čech-Kohomologie bezüglich der Überdeckungen $\mathcal{U}, \mathcal{U}^{\mathrm{an}}$

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_Y) & \xrightarrow{\beta} & \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}^{\mathrm{an}}, \Omega^p_{Y^{\mathrm{an}}}) \\ {\scriptstyle \check{\mathrm{H}}^q(\sigma^*)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \check{\mathrm{H}}^q(\sigma^{\mathrm{an}*})} \\ \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}, \Omega^p_Y) & \xrightarrow{\beta} & \check{\mathrm{H}}^q(\mathcal{U}^{\mathrm{an}}, \Omega^p_{Y^{\mathrm{an}}}). \end{array}$$

In der linken Spalte dürfen wir wieder nach [Har77], Seite 222, die Čech- durch die Garbenkohomologie ersetzen. Ausnutzen der Funktorialität von $\beta$ liefert dann das entsprechende Diagramm in der Garbenkohomologie. Dies induziert wieder einen Morphismus der Spektralsequenzen, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_Y) & \xrightarrow{\beta(\Omega^\bullet_Y)} & \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}) \\ {\scriptstyle \mathbb{H}^i(\sigma^*)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{H}^i(\sigma^{\mathrm{an}*})} \\ \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_Y) & \xrightarrow{\beta(\Omega^\bullet_Y)} & \mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}). \end{array}$$

Wir haben die folgende Aussage mitbewiesen

**Korollar 2.3.3.** $\mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}) = \mathbb{H}^i((\sigma^{\mathrm{an}})_*\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}})$.

### 2.3.4 Das dritte Diagramm

$\boxed{3}$ Das Lemma von Poincaré.

**Korollar 2.3.5.** —`-aus Poincarés Lemma:` *Da $Y^{\mathrm{an}}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, besagen Satz 1.4.3 und die nachfolgende Bemerkung*

$$\mathbb{H}^i(\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}) = H^i(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}})$$

Sei nun $\sigma^{\mathrm{an}}$ wieder ein Automorphismus von $Y^{\mathrm{an}}$, wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \{U \to \mathbb{C} \text{ lok konst}\} & \longrightarrow & \{U \to \mathbb{C} \text{ holo}\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{(\sigma^{\mathrm{an}})^{-1}U \to \mathbb{C} \text{ lok konst}\} & \longrightarrow & \{(\sigma^{\mathrm{an}})^{-1}U \to \mathbb{C} \text{ holo}\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f & \longmapsto & f \\ \downarrow & & \downarrow \\ f \circ \sigma^{\mathrm{an}} & \longmapsto & f \circ \sigma^{\mathrm{an}} \end{array}.$$

Das induziert ein kommutatives Diagramm von Komplexen

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}} & \xrightarrow{\gamma} & \Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}} \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma^*_{\mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}}} & & {\scriptstyle \sigma^{\mathrm{an}*}}\downarrow \\ (\sigma^{\mathrm{an}})_*\mathbb{C}^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}} & \xrightarrow{\gamma} & (\sigma^{\mathrm{an}})_*\Omega^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}} \end{array},$$

wobei $\mathbb{C}^\bullet_{Y^{\mathrm{an}}}$ in Grad Null $\mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}$ und in den anderen Graden Null ist. Da $\sigma^{\mathrm{an}}$ ein Isomorphismus ist , ist auch die untere Zeile ein Quasi-Isomorphismus. Außerdem gilt $(\sigma^{\mathrm{an}})_*\mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}} = \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}$ [4]. Anwenden der Hyperkohomologie liefert Diagramm $\boxed{3}$.

### 2.3.6 Das vierte Diagramm

$\boxed{4}$ Koeffizientenwechsel.

**Lemma 2.3.7.** *Es sei $Y^{\mathrm{an}}$ ein beliebiger topologischer Raum. Es gilt*

$$\mathrm{H}^i(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}) \cong \mathrm{H}^i(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

**Beweis:** Sei $I$ ein $\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}$-Modul. Die Prägarbe $U \mapsto I(U) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ ist schon eine Garbe und es gilt $\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}$. Für die globalen Schnitte dieser Garbe gilt per Definition

$$\Gamma(Y^{\mathrm{an}}, I \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}\ ) = \Gamma(Y^{\mathrm{an}}, I) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

Ist $\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}} \to I^\bullet$ eine injektive Auflösung in ($\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}$-Mod), so ist (da $- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ exakt ist) $\mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}} \to I^\bullet \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ eine welke Auflösung und somit

$$\mathrm{H}^i(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}) = \mathrm{H}^i(\Gamma(I^\bullet \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})) = \mathrm{H}^i(\Gamma(I^\bullet) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) = \mathrm{H}^i(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

□

**Diagramm** $\boxed{4}$ Es sei $\sigma^{\mathrm{an}} : Y^{\mathrm{an}} \to Y^{\mathrm{an}}$ wie immer. Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{C}$ haben wir einen Morphismus von Garben $\sigma^*_{\mathbb{K}_{Y^{\mathrm{an}}}} : \mathbb{K}_{Y^{\mathrm{an}}} \to (\sigma^{\mathrm{an}})_*\mathbb{K}_{Y^{\mathrm{an}}}$, definiert durch

$$\mathbb{K}_{Y^{\mathrm{an}}}(U) = \{f : U \to \mathbb{K} \text{ lokal konstant}\} \to \mathbb{K}_{Y^{\mathrm{an}}}(\sigma^{\mathrm{an}-1}(U)),\ f \mapsto f \circ (\sigma^{\mathrm{an}})|_U.$$

Identifiziert man $\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \text{ lokal konstant}\}$, so sieht man $\sigma^*_{\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}} \otimes_{\mathbb{Q}} id_{\mathbb{C}} = \sigma^*_{\mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}}$. Das ergibt $\mathrm{H}^i(\sigma^*_{\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}} \otimes_{\mathbb{Q}} id_{\mathbb{C}}) = \mathrm{H}^i(\sigma^*_{\mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}})$. Wählt man injektive Auflösungen $\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}} \to I^\bullet$, $(\sigma^{\mathrm{an}})_*\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}} \to J^\bullet$, so gibt es eine Fortsetzung von $\sigma^*_{\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}}$ zu einer Abbildung von Komplexen $\sigma_{IJ} : I^\bullet \to J^\bullet$. Dann tensoriert man mit $- \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ und sieht $\mathrm{H}^i(\sigma^*_{\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \mathrm{H}^i(\sigma^*_{\mathbb{Q}_{Y^{\mathrm{an}}}} \otimes_{\mathbb{Q}} id_{\mathbb{C}})$

**Bemerkung 2.3.8.** (i) Man kann die Diskussion der vier Diagramme etwas verkürzen, indem man die analytische Situation betrachtet. Es sei $\mathcal{L}^i$ das zu $(L^{\otimes i}, \nabla_{L^{\otimes i}})^{\mathrm{an}}$ gehörende lokale System. Dann kann man nachrechnen

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathrm{H}^j(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{L}^i) \cong \mathrm{H}^j(X^{\mathrm{an}}, \pi^{\mathrm{an}}_*\mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}) \cong \mathrm{H}^j(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}})$$

und das ist wieder die Eigenraumzerlegung unter der Operation einer primitiven Einheitswurzel. Dann kann man mit Diagramm vier fortfahren.

[4] denn $\mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}(U) = \mathbb{C}^{\text{Anz. Zusammenhangskomponenten von } U} = \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}}(\sigma^{\mathrm{an}-1}(U))$

(ii) Die vier kommutativen Diagramme besagen, daß die Operation von $\mu_n$ auf $\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)$ über $\mathbb{Q}$ definiert ist. Das Gleiche Argument funktioniert allgemeiner:
Es sei $\pi : Y \to X$ eine $G$-Galoisüberlagerung eigentlicher glatter Varietäten über $\mathbb{C}$. Dann ist die Darstellung

$$G \to Gl(\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y))$$

über $\mathbb{Q}$ definiert.

# 3 ad B):Eine Variante des Beweises

Wir geben nun einen alternativen Beweis des Satzes von Pink und Rössler an, der von Frau Esnault vorgeschlagen wurde.

Es sei $L$ ein $n$-Torsionsgeradenbündel auf einer komplexen eigentlichen glatten Varietät $X$ mit dem in Abschnitt 2.1.4 konstruierten integrierbaren Zusammenhang $\nabla_L$. Wir gehen zur Analytifizierung über, behalten die Bezeichnung aber bei. Sei $\mathcal{L}$ das zu $(L, \nabla_L)$ gehörige lokale System, siehe Satz 1.4.3. Benutzt man wieder Lemma 1.3.3, kann man die Hodgekohomologie von $L^{\otimes i}$ durch die de Rham-Kohomologie von $L^{\otimes i}$ ersetzen, und mit Korollar 1.1.13 reicht es zu zeigen, daß

$$(\star) \quad h^i(X, \mathcal{L}) = h^i(X, \mathcal{L}^{\otimes a}), \ \ \forall (a, n) = 1,$$

wobei man die Eigenschaft 1.4.5, $\otimes$ benutzt, um zusehen, daß das lokale System zu $(L^{\otimes a}, \nabla_{L^{\otimes a}})$ gerade $\mathcal{L}^{\otimes a}$ ist.

*Beweis.* Der Beweis von $(\star)$ folgt aus den folgenden beiden Lemmata. $\square$

**Lemma 3.0.9.** *Es sei $\pi : Y \to X$ die Analytifizierung der zu dem $n$-Torsionsgeradenbündel $L$ gehörigen zyklischen Überlagerung. Dann gibt es einen Isomorphismus von Komplexen*

$$(\pi^* L, \pi^* \nabla_L) \cong (\mathcal{O}_Y, d_Y).$$

*Beweis.* Es sei $\mathcal{L}$ das zu dem integrierbaren Zusammenhang $\nabla_L$ korrespondierende lokale System. Es reicht zu sehen, daß $\pi^{-1}\mathcal{L} \cong \mathbb{C}_Y$ gilt (siehe Bem. 1.4.5, $\pi^*$). Nach Abschnitt 2.1.4 wissen wir, wie die Operation von $\mu_n$ auf $\pi_*\mathbb{C}_Y$ aussieht: Es sei $\sigma \in Aut_X(Y)$ zu einer primitiven Einheitswurzel $\xi \in \mu_n$ gehörig, $U \subset Y$ offen. Dann gilt

$$\begin{array}{ccc} \pi_*\mathbb{C}_Y(U) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes i}(U) & \to & \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes i}(U) = \pi_*\mathbb{C}_Y(U) \\ \bigoplus_{i=0}^{n-1} l_i & \mapsto & \bigoplus_{i=0}^{n-1} \xi^i l_i \end{array}$$

Somit kann man $\mathcal{L}$ wie folgt beschreiben

$$\mathcal{L}(U) = \{s \in \pi_*\mathbb{C}_Y |\ \sigma(s) = \xi \cdot s\},$$

wir nennen $\rho : \mu_n \to \mathbb{C}^*$ die Darstellung, die zu $\xi$ gehört, so gilt

$$\mathcal{L}(U) = \{s : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{C} |\ s \text{ lok. konst.}, s \circ g = \rho_g \circ s\ \forall g \in \mu_n\}.$$

Damit haben wir $\mathcal{L} = \mathcal{E}_\rho$ und nach Satz 1.4.9 ist das ein $\pi^*$-triviales lokales System. $\square$

**Lemma 3.0.10.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine topologische $\mu_n$-Galoisüberlagerung und $\mathcal{L}$ ein lokales System vom Rang 1 auf $X$, das auf $Y$ trivial wird, dann gilt*

$$h^i(X, \mathcal{L}) = h^i(X, \mathcal{L}^{\otimes a})$$

*für alle $(a, n) = 1$, $i \geq 0$.*

*Beweis.* Wir benutzen die Korrespondenz aus Satz 1.4.9 und ihre Beschreibung in Bemerkung 1.4.10, seien $\rho^{\mathcal{L}}$, $\rho^{\mathcal{L}^{\otimes a}}$ die zu $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{\otimes a}$ korrespondierenden Darstellungen. Es sei $\xi \in \mu_n$ eine primitive Einheitswurzel, wähle $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $\tau(\xi) = \xi^a$ in $Gal(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Insbesondere gilt $\tau|_{\mu_n}$ ist $a$-faches Potenzieren. Dann gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mu_n \arrow[r, "\rho^{\mathcal{L}}"] \arrow[dr, "\rho^{\mathcal{L}^{\otimes a}}"'] & Gl_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \arrow[d, "\tau|_{\mathbb{C}^*}"] \\ & Gl_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Sei nun $U \subset X$ offen, dann gilt

$$\mathcal{L}(U) = \{s : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{C} |\ s(gu) = \rho_g^{\mathcal{L}} s(u)\ \forall u \in \pi^{-1}(U), g \in \mu_n\}.$$

Insbesondere haben wir einen Isomorphismus

$$\mathcal{L}(U) \to \mathcal{L}^{\otimes a}(U),\ s \mapsto \tau \circ s$$

(denn $\tau \circ s(gu) = \tau(\rho_g^{\mathcal{L}} s(u)) = \tau(\rho_g^{\mathcal{L}})\tau(s(u)) = \rho_g^{\mathcal{L}^{\otimes a}} \tau \circ s(u)\ \forall s \in \mathcal{L}(U),\ g \in \mu_n,\ u \in \pi^{-1}(U)$). Das liefert einen ($\tau$-linearen) Isomorphismus von Garben $\mathcal{L} \to \mathcal{L}^{\otimes a}$. □

# 4 ad C):Verallgemeinerung

Wir fixieren $\pi : Y \to X$ eine algebraische $G$-Galoisüberlagerung projektiver glatter Varietäten über $\mathbb{C}$.

**Zusammenfassung der Abschnitte:**

**Monodromie von Vektorbündeln** ist ein Funktor (sogar eine Äquivalenz von Kategorien) von der Kategorie der Vektorbündel auf $X$, die auf $Y$ zurückgezogen trivial werden, in die Kategorie der Darstellungen von $G$ über $\mathbb{C}$. Damit gibt es also auch eine Kategorien-Äquivalenz zwischen $\pi^*$-trivialen Vektorbündeln und $\pi^{-1}$-trivialen lokalen Systemen. Als Korollar erhalten wir, daß alle involvierten Kategorien halbeinfach sind, da es die Kategorie der Darstellungen von $G$ über $\mathbb{C}$ ist.

**Hodgezahlen von $\pi^*$-trivialen Vektorbündeln** sind nichts anderes als die Dimensionen der Garbenkohomologie der entsprechenden $\pi^{-1}$-trivialen lokalen Systeme. Die offensichtliche Verallgemeinerung der Beweisvariante (siehe 4.2.2) führt zu einer Verallgemeinerung des Satzes von Pink und Rössler.

**Zerlegungen** beschäftigt sich erst allgemein mit Zerlegungen von Vektorbündeln unter der Operation einer endlichen Gruppe. Anwendung auf $\pi_*\mathcal{O}_Y$ mit der kanonischen Operation, das unter der Monodromie-Korrespondenz zur regulären Darstellung korrespondiert, liefert eine Beschreibung der Vektorbündel, die zu den irreduziblen Darstellungen korrespondieren.

**Verallgemeinerung des Beweises von Pink und Rössler** erhalten wir, indem wir die Garbe $\pi_*\mathcal{O}_Y$ in die Vektorbündel, die zu den irreduziblen Darstellungen korrespondieren, zerlegen. Nun ist die $G$-Operation auf der Hyperkohomologie von dem Komplex $(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)$ schon über $\mathbb{Q}$ definiert...

## 4.1 Monodromie von Vektorbündeln

Es sei $\pi : Y \to X$ eine $G$-Galoisüberlagerung glatter komplexer projektiver Varietäten. Wir beginnen damit, Monodromie für $\pi^*$-triviale[1] Vektorbündel in Analogie zu Monodromie von lokalen System (siehe Satz 1.4.9) zu betreiben.

[1] das heißt, zieht man das Vektorbündel zurück, ist es isomorph zu einem freien $\mathcal{O}_Y$-Modul

Wir haben auf $\pi^*E$ eine kanonische ($\mathcal{O}_Y$-lineare) $G$-Garbenstruktur, siehe Definition 5.1.9 [2].

**Satz 4.1.1.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine algebraische $G$-Galoisüberlagerung ($\mathcal{O}_\mathrm{X}$ bzw. $\mathcal{O}_Y$ seien die Strukturgarben von $X$ bzw. $Y$). Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \pi^*\textit{-triviale lokal freie} \\ \mathcal{O}_\mathrm{X}\textit{-Moduln vom Rang } r \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \textit{Freie } (\mathcal{O}_Y\textit{-lineare}) \\ G\textit{-Garben vom Rang } r \end{pmatrix} \\ E & \longrightarrow & (\pi^*E, (\psi_g)_{g\in G}) \\ (\pi_*F)^{G,(\psi)} & \longleftarrow & (F, (\psi_g)_{g\in G}). \end{array}$$

*Beweis.* siehe [Mum74], Seite 70, Proposition 2. Diesen Satz wiederholen wir im Anhang als Satz 5.1.10. □

Da $Y$ projektiv ist, ist die Menge der Automorphismen von $\mathcal{O}_Y^r$ nichts anderes als $Gl_r(\mathbb{C})$. Da sich $G$-Garbenstrukturen nicht so sehr von Automorphismen unterscheiden, können wir die folgende Aussage beweisen

**Lemma 4.1.2.** *Es sei $Y$ eine projektive Varietät[3] über $\mathbb{C}$, auf der eine endliche Gruppe $G$ durch Automorphismen operiert. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \textit{Freie } (\mathcal{O}_Y\textit{-lineare}) \\ G\textit{-Garben vom Rang } r \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \textit{Darstellungen } G \to Gl_r(V) \textit{ mit} \\ V \;\; r\textit{-dim. } \mathbb{C}\textit{-Vektorraum} \end{pmatrix} \\ (F, (\psi_g)_{g\in G}) & \longrightarrow & \begin{pmatrix} \rho : G \to Gl(F(Y)) \\ \rho_g := \psi_g(Y)^{-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Vor dem Beweis bemerken wir

**Bemerkung 4.1.3.** Gegeben eine Garbe von Ringen $\mathcal{R}$, einen $\mathcal{R}$-Modul $\mathcal{M}$ und einen Isomorphismus von Garben von Ringen $j : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$. Dann ist die Tensorprägarbe $\mathcal{M} \otimes_\mathcal{R} \mathcal{R}'$ bereits eine Garbe. (Denn: Man faßt $\mathcal{M}$ via $j^{-1}$ als $\mathcal{R}'$ Modul $\mathcal{M}'$ auf. Dann hat man einen Isomorphismus von Prägarben $\mathcal{M} \otimes_\mathcal{R} \mathcal{R}' \to \mathcal{M}'$, $m \otimes r' \mapsto r' \cdot m$. Da $\mathcal{M}'$ eine Garbe ist, ist es $\mathcal{M} \otimes_\mathcal{R} \mathcal{R}'$ auch.)

*Beweis.* Es sei $(F, (\psi_g)_{g\in G})$ wie in der Behauptung. Nach der vorigen Bemerkung gilt $g^*F = g^{-1}F \otimes_{g^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y$, somit gilt $g^*F(Y) = F(gY) \otimes_{\mathcal{O}_Y(gY)} \mathcal{O}_Y(Y) = F(Y)$ und $\psi_g(Y) : F(Y) \to F(Y)$ ist ein Automorphimus. Da $Y$ eine projektive Varietät und $F$ frei ist, ist $F(Y)$ ein $r$-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Die $G$-Garbenbedingung $\psi_{gh} = \psi_h \circ h^*(\psi_g)$ für $g, h \in G$ besagt, daß die Abbildung $G \to Gl(F(Y))$, $g \mapsto \psi_g(Y)^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

[2] Man beachte den Unterschied zu unserem ersten $G$-Garbenbegriff! *Hier:* Gegeben ein Schema $(Y, \mathcal{O}_Y)$, auf dem eine endliche Gruppe operiert. Eine ($\mathcal{O}_Y$-lineare) $G$-Garbe ist ein $\mathcal{O}_Y$-Modul $F$ zusammen mit $\psi_g : g^*F \to F$, so daß $\psi_{gh} = \psi_h \circ h^*(\psi_g)$ für $g, h \in G$ gilt.

[3] Erinnerung: Insbesondere ist $Y$ irreduzibel

Andersherum sei eine Darstellung $\rho : G \to Gl(V)$ mit $\dim_{\mathbb{C}} V = r$ gegeben. Wir definieren $F := V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_Y$ und die kanonische $G$-Garbenstruktur $(f_g)_{g \in G}$ auf $F$ über die kanonische $G$-Garbenstruktur $(j_g)_{g \in G}$ von $\mathcal{O}_Y$, i.e. $f_g = id_V \otimes j_g$. Es folgt $Aut_{\mathcal{O}_Y - Mod}(F) = Gl(V)$. Wir definieren nun die zu $\rho$ gehörige $G$-Garbenstruktur via

$$\phi_g : g^* F \xrightarrow{f_g} F \xrightarrow{\rho_g^{-1}} F.$$

Es ist leicht zu sehen, daß die globalen Schnitte dieser $G$-Garbenstruktur $\rho$ zurückliefern (man muss sich nur klar machen, daß $(j_g)_{g \in G}$ auf globalen Schnitten die Identität sind).

Andersherum sei eine beliebige freie $G$-Garbe $(F, (\psi_g)_{g \in G})$ vom Rang $r$ gegeben. Es sei $\rho$ die zugehörige Darstellung gegeben durch $\rho_g = \psi_g(Y)^{-1}$. Wir betrachten die zu $\rho$ gehörige $G$-Garbenstruktur $\phi_g : g^* F \xrightarrow{f_g} F \xrightarrow{\rho_g^{-1}} F$. Da $\phi_g^{-1} \psi_g$ ein Automorphismus von $F$ ist, der auf globalen Schnitten die Identität ist, folgt $\phi_g = \psi_g$. □

Setzt man den letzten Satz und das vorige Lemma zusammen, erhält man den folgenden Satz, den wir in Anlehnung an die übliche Monodromie-Korrespondenz wie folgt bezeichnen

**Satz 4.1.4.** —- `Monodromie-Korrespondenz von Vektorbündeln:` *Es sei $\pi : Y \to X$ eine $G$-Galoisüberlagerung komplexer projektiver Varietäten. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{pmatrix} \pi^{-1}\text{-triviale lokal freie} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{X}}\text{-Moduln vom Rang } r \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \text{Darstellungen } G \to Gl(V) \text{ mit} \\ V \;\; r\text{-dimensionaler } \mathbb{C}\text{-Vektorraum} \end{pmatrix}.$$

In dem folgenden Sinne kann man das mit der üblichen Monodromie aus Abschnitt 1.4.6 in Zusammenhang bringen

**Korollar 4.1.5.** *Es sei $\pi : Y \to X$ die Analytifizierung einer $G$-Galoisüberlagerung glatter komplexer projektiver Varietäten. Dann haben wir eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \pi^{-1}\text{-triviale lok. Systeme} \\ \text{auf } X \text{ vom Rang } r \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \pi^{*}\text{-triviale lokal freie} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{X}}\text{-Moduln vom Rang } r \end{pmatrix} \\ \mathcal{E} & \mapsto & \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}} \end{array}$$

*Beweis.* Es sei $\mathcal{E}$ ein $\pi^{-1}$-triviales lokales System. Es gilt[4]

$$\begin{aligned} \pi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}}) &= \pi^{-1}(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{O}_Y \\ &\cong (\pi^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}) \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}} \mathcal{O}_Y \\ &\cong \pi^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_Y \end{aligned}$$

[4]Wobei beim zweiten Isomorphismus gilt: Tensorprodukte kommutieren mit beliebigen Colimiten, darum sind die beiden Garben als Garbifizierung isomorpher Prägarben isomorph

Insbesondere ist der Funktor wohldefiniert. Nun reicht es zu sehen, daß für die $\mathcal{O}_Y$-lineare $G$-Garbe $(\pi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}}), (\psi_g)_{g\in G})$ und für die $G$-Garbe $(\pi^{-1}\mathcal{E}, (\phi_g)_{g\in G})$

$$\psi_g(Y) = \phi_g(Y) \text{ für alle } g \in G \text{ gilt.}$$

Wir wissen schon, daß der kanonische Morphismus $g^{-1}\mathcal{O}_Y(Y) = \mathcal{O}_Y(gY) \to \mathcal{O}_Y(Y)$ gleich der Identität auf $\mathbb{C}$ ist. Also haben wir wieder mit Bemerkung 4.1.3

$$\psi_g(Y) : \pi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}})(gY) \otimes_{\mathcal{O}_Y(gY)} \mathcal{O}_Y(Y) = \pi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}})(gY) \to \pi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}})(Y)$$

Also können wir für unsere Zwecke die $G$-Garbenstruktur nach unserer ersten Definition

$$\psi'_g : g^{-1}(\pi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}})) \to \pi^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}})$$

betrachten. Unter dem zu Beginn angeführten Isomorphismus transormiert sie sich zu

$$\psi_g^{(2)} : g^{-1}\pi^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} g^{-1}\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\phi_g \otimes j_g} \pi^{-1}\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_Y,$$

wobei $j_g : g^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_Y, g \in G$ die kanonische $G$-Garbenstruktur ist. Da $\pi^{-1}\mathcal{E} = g^{-1}\pi^{-1}\mathcal{E}$ isomorph zu $\mathbb{C}_Y^r$ ist und $j_g(Y) = id_{\mathbb{C}}$ gilt, sieht man $\psi_g^{(2)}(Y) = \phi_g(Y)$. □

Man sieht sehr leicht, daß die beiden Monodromie-Korrespondenzen direkte Summen und Tensorprodukte von lokalen Systemen bzw. Vektorbündeln in direkte Summen und Tensorprodukte von Darstellungen von $G$ überführen. Da die Kategorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe in endlichdimensionalen Vektorräumen über $\mathbb{C}$ halbeinfach ist, folgt

**Korollar 4.1.6.** *In der Situation des Korollars 4.1.5 sind die Kategorien*

$$\begin{pmatrix} \pi^*\text{-triviale lok. freie Systeme} \\ \text{auf } X \text{vom Rang } r \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \pi^*\text{-triviale lok. freie} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{X}}\text{-Moduln vom Rang } r \end{pmatrix}$$

*halbeinfach.*

**Bemerkung 4.1.7.** In der Situation des Korollars 4.1.5.

(i) Jeder kohärente $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul, der $\pi^*$-trivial ist, ist lokal frei.

(ii) Falls $G$ kommutativ ist, zerfällt jede Darstellung in eine direkte Summe eindimensionaler Darstellungen. Die zugehörigen $\pi^*$-trivialen Vektorbündel sind Torsionsgeradenbündel. Da wir diese Situation schon untersucht haben, ist für uns nur der Fall einer nichtkommutativen Gruppe interessant.

(iii) Ist $E$ ein $\pi^*$-triviales Vektorbündel, so besitzt $E$ einen kanonischen $\pi^{-1}$-trivialen integrierbaren Zusammenhang im Sinne von 1.4.5 $\pi^*$, und die Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenz degeneriert für $E$.

*Beweis.* (i) Im Beweis haben wir nur kohärent benutzt, um den Satz von Mumford anzuwenden. Ein kohärenter $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul der Form $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, wobei $\mathcal{E}$ ein lokales System ist, ist offensichtlich lokal frei.
(ii) siehe [Ser82], Theorem 9 auf Seite 25.
(iii) Korollar 4.1.5 liefert die Existenz des Zusammenhanges $\nabla$, der zu dem $\pi^{-1}$-trivialen lokalen System $\mathcal{E}$ mit $E \cong \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ korrespondiert. Nun ist $\mathcal{E}$ isomorph zu $(\pi_* \mathbb{C}_Y^r)^G$ für eine[5] $\mathbb{C}$-lineare $G$-Operation auf $\pi_* \mathbb{C}_Y^r$, siehe Abschnitt 1.4.6. Da $G$ endlich ist, ist $\mathcal{E}$ ein direkter Summand von $\pi_* \mathbb{C}_Y^r$ (man kann sehr einfach einen Schnitt für die Inklusion $(\pi_* \mathbb{C}_Y^r)^G \to \pi_* \mathbb{C}_Y^r$ angeben). Also gibt es eine Zerlegung $\pi_* \mathbb{C}_Y^r \cong \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ und man folgert $\mathcal{F}$ ist ein lokales System. Somit gilt $(\pi_* \mathcal{O}_Y^r, \pi_* d_Y) \cong (E, \nabla) \oplus (\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}}, \nabla_{\mathcal{F}})$. Aus Lemma 1.3.3 folgt die Behauptung. □

Damit ist es nun relativ einfach, den Satz von Pink und Rössler zu verallgemeinern.

## 4.2 Über Hodgezahlen von Vektor bündeln, die auf einer endlichen Überlagerung trivial werden

**Satz 4.2.1.** *Gegeben eine $G$-Galoisüberlagerung glatter projektiver komplexer Varietäten $\pi : Y \to X$ . Es seien $\rho$, $\rho' : G \to Gl_r(\mathbb{C})$ zwei Darstellungen von $G$, die durch einen Körperautomorphismus $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auseinander hervorgehen (i.e. $\rho = \tilde{\tau} \circ \rho'$, wobei $\tilde{\tau} : Gl_r(\mathbb{C}) \to Gl_r(\mathbb{C})$, $(a_{ij})_{ij} \mapsto (\tau(a_{ij}))_{ij}$ ist). Es seien $E_\rho$, $E_{\rho'}$ die durch Monodromie definierten Vektorbündel. Dann gilt*

$$h^i_{Hdg}(E_\rho) = h^i_{Hdg}(E_{\rho'}).$$

Wir geben zwei Beweise für diesen Satz. Einen gleich im Anschluß , der eine offensichtliche Verallgemeinerung der von Frau Esnault vorgeschlagenen Beweisvariante ist und eine Verallgemeinerung des Beweises von Pink und Rössler, für die wir aber noch ein wenig mehr Wissen brauchen.
*Beweis.* Für $(E_\rho, \nabla_\rho)$ degeneriert die Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenz, siehe Bemerkung 4.1.7 (iii). Das heißt wir dürfen den Index *Hdg* durch den Index *dR* in der Behauptung ersetzen. Übergang zur Analytifizierung und die zweite Aussage in Satz 1.4.3 liefern

$$\mathbb{H}^i(E_\rho, \nabla_\rho) \cong \mathrm{H}^i(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{E}_\rho),$$

also reicht es zu zeigen, daß

$$h^i(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{E}_\rho) = h^i(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{E}_{\rho'})$$

gilt und das folgt aus dem folgenden Lemma. □

[5] im Allgemeinen nicht die kanonische!

**Lemma 4.2.2.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine topologische $G$-Galoisüberlagerung und $\rho,\ \rho' : G \to Gl_r(\mathbb{C})$ zwei Darstellungen von $G$, die durch einen Körperautomorphismus $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auseinander hervorgehen (siehe voriger Satz). Es seien $\mathcal{E}_\rho$, $\mathcal{E}_{\rho'}$ die durch Monodromie definierten lokal freien Systeme. Dann gilt für $i \geq 0$*

$$h^i(X, \mathcal{E}_\rho) = h^i(X, \mathcal{E}_{\rho'}).$$

*Beweis.* Für $U \subset X$ offen gilt

$$\mathcal{E}_\rho(U) = \{\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C}^r |\ \sigma \text{ lok. konst.}, \sigma \circ g = \rho_g \circ \sigma\ \forall g \in G\}.$$

Wir definieren

$$\mathcal{E}_\rho(U) \to \mathcal{E}_{\rho'}(U),\ s \mapsto \tau^r \circ s,$$

wohldefiniert wegen $\tau^r \circ s(gu) = \tau^r(\rho_g s(u)) = (\tilde{\tau} \circ \rho_g)(\tau^r \circ s(u)) = \rho'_g \circ (\tau^r \circ s)(u)\ \forall s \in \mathcal{E}_\rho(U),\ g \in G,\ u \in \pi^{-1}(U)$. Also haben wir einen $\tau$-linearen Garbenisomorphismus $\mathcal{E}_\rho \to \mathcal{E}_{\rho'}$. □

### 4.2.3 Welche Körperautomorphismen suchen wir?

Wann kann man einen Körperautomorphismus $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ finden, so daß $E_\rho$ als $\mathcal{O}_X$-Modul nichtisomorph zu $E_{\rho'}$ ist? Gegeben eine endliche Gruppe $G$, die Frage ist, ob wir ein $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ finden können, so daß $\chi_\rho \neq \tau \circ \chi_\rho$ gilt. Das ist genau dann der Fall, wenn $\chi_\rho$ mindestens einen Wert nicht in $\mathbb{Q}$ annimmt[6]. Wir können diese Frage auf irreduzible Charaktere zurückführen. Seien $\chi_1, \ldots, \chi_h$ die irreduziblen Charaktere von $G$, $\chi_\rho = m_1\chi_1 + \cdots + m_h\chi_h$ mit $m_i \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gilt, $\chi_i \mapsto \tau \circ \chi_i =: \chi_{\tau(i)}$ ist nur eine Permutation der irreduziblen Charaktere[7]. Nun gilt $\chi_\rho = \tau \circ \chi_\rho = m_1\chi_{\tau(1)} + \cdots + m_h\chi_{\tau(h)}$ genau dann, wenn $m_i = m_{\tau(i)},\ 1 \leq i \leq h$.
Somit kennt man alle $\tau$, die $\chi_\rho$ nicht fest lassen, wenn wir die $\tau$ gefunden haben, die die irreduziblen Charaktere nicht fest lassen. Um zu testen, ob diese über $\mathbb{Q}$ definiert sind, suche man sich die entsprechenden Charaktertafeln[8].

[6] Eine Darstellung ist genau dann über $\mathbb{Q}$ definiert, wenn ihr Charakter nur Werte in $\mathbb{Q}$ annimmt, siehe [Ser82], Seite 91, Proposition 33.

[7] Ein Charakter $\chi$ ist genau dann irreduzible, wenn $(\chi, \chi) = 1$ gilt, siehe [Ser82], Seite 17, Theorem 5. Es gilt

$$(\tau \circ \chi, \tau \circ \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \tau(\chi(g))\tau(\chi(g^{-1})) = \tau \circ (\chi, \chi)$$

Also ist $\chi_i$ irreduzibel, so auch $\tau \circ \chi_i$. Via $\tau^{-1} \circ -$ erhalten wir eine Umkehrabbildung.

[8] Zum Beispiel für $D_n$, siehe [Ser82], Seite 37,38. Aber es gibt auch Gruppen ohne für uns interessante Charaktere wie die $S_n$; da jedes Element Produkt von Elementen der Ordnung 2 ist, sind alle Eigenwerte $\{1, -1\}$, somit nehmen Charaktere immer nur Werte in $\mathbb{Z}$ an.

## 4.3 Zerlegungen

### Zerlegung in isotypische Komponenten

[9] Es sei $X$ eine glatte projektive Varietät über $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul vom Rang $r$, $G$ eine endliche Gruppe und $\rho : G \to Aut_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}-Mod}(\mathcal{A})$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir zeigen: Dann gibt es eine Zerlegung $\mathcal{A} \cong \bigoplus_{\lambda \in \hat{G}} \mathcal{A}_\lambda$ in invariante $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln, wobei $\hat{G}$ die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen von $G$ ist.
Die Zerlegung erhalten wir aus der Zerlegung von Darstellungen der Gruppe $G$ in endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorräumen in irreduzible Unterdarstellungen, siehe im Anhang Satz 5.2.4.

**Die Zerlegung von $\mathcal{A}$** Wir definieren einen Charakter für $\rho : G \to Aut_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}-Mod}(\mathcal{A})$.

**Definition 4.3.1.** Sei $x \in X(\mathbb{C})$ ein abgeschlossener Punkt, Übergang zum Halm liefert $\rho_x : G \to Aut_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}x}-Mod}(\mathcal{A}_x)$ und $\mathcal{O}_{\mathrm{X}x} \to \mathcal{O}_{\mathrm{X}x}/m_x$ liefert $\tilde{\rho_x} : G \to Gl(\mathcal{A}_x \otimes \mathbb{C})$. Wir definieren

$$\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}((\tilde{\rho_x})_g)(\in \mathbb{C})$$

**Lemma 4.3.2.** *Die Definition hängt nicht von der Wahl von $x \in X(\mathbb{C})$ ab.*

**Beweis:** Wir fixieren $g \in G$ und variieren $x$. Es reicht zu sehen, daß die Funktion auf (beliebig kleinen) affinen Mengen konstant ist. Es sei $U = \operatorname{Spec} R \subset X$ offen mit $\mathcal{A}(U) \cong R^r$, wir identifizieren $\rho_g(U)$ mit einer Matrix $A \in GL(R^r)$, $\mathrm{Tr}(\rho_g(U)) = \mathrm{TrA} \in R$. Es reicht nun zu sehen $\mathrm{Tr}A \in \mathbb{C}$, denn die Abbildungen $R \to R/m$ sind $\mathbb{C}$-linear und die Spur bliebe konstant, unabhängig davon welches maximales Ideal wir gewählt haben. Es sei $K = R_{(0)}$ der Quotientenkörper von $R$, wir benutzen die Einbettung $Gl(R^r) \subset Gl(K^r)$. Es sei $m_A(T) \in K[T]$ das Minimalpolynom von $A$. Es sei $s := | < g > |$, dann gilt $A^s = I$, also ist $m_A(T)$ ein Teiler von $T^s - 1$. Insbesondere sind alle Nullstellen (=Eigenwerte) $s$-te Einheitswurzeln, und damit gilt $\mathrm{Tr}A \in \mathbb{C}$. □

Seien $\chi_1, \ldots, \chi_h$ die verschiedenen irreduziblen Charaktere von $G$, $n_i = \chi_i(1)$. Wir definieren

$$p_i := \frac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1})\rho_g \ : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

und setzen $\mathcal{A}_i := \mathrm{im} p_i$ (das ist wieder ein $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul).

**Lemma 4.3.3.** *Der induzierte Morphismus $\bigoplus p_i : \mathcal{A} \to \bigoplus_{i=1}^h \mathcal{A}_i$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln.*

[9] die Zerlegung von $\mathcal{A}$ wurde von Torsten Wedhorn vorgeschlagen

**Beweis:** Es reicht die Behauptung an Halmen von Punkten $x \in X(\mathbb{C})$ zu überprüfen (da diese dicht liegen). Sei $x \in X(\mathbb{C})$. Nach 5.2.5 ist die Abbildung

$$\mathcal{A}_x \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}_x}} \mathbb{C} \to \bigoplus (\mathcal{A}_i)_x \otimes \mathbb{C}$$

ein Isomorphismus. Nach dem vorigen Lemma ist $dim(\mathcal{A}_i)_x \otimes \mathbb{C} = (\chi_\rho, \chi_i)n_i =: m_i n_i$ unabhängig von $x \in X(\mathbb{C})$. Da $X$ reduziert ist, können wir [Liu02], Aufgabe 5.1.15 c) (Seite 174) anwenden und erhalten $\mathcal{A}_i$ ist lokal frei vom Rang $m_i n_i$. Ist $\{\bar{u_1}, \dots, \bar{u_r}\}$ eine Basis von $\bigoplus (\mathcal{A}_i)_x \otimes \mathbb{C}$, so wählt man Urbilder $\{u_1, \dots, u_r\}$ in $\bigoplus (\mathcal{A}_i)_x$ , die im Bild des Morphismus liegen. Nach Nakayama ist $\{u_1, \dots, u_r\}$ Erzeugendensystem, also der Morphismus surjektiv. Ein surjektiver Endomorphismus eines endlich erzeugten Moduls über einem Ring ist immer injektiv (siehe [Mat89], Thm 2.4 auf Seite 9). □

**Korollar 4.3.4.** *$\mathcal{A}_i$ ist ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul vom Rang $(\chi_\rho, \chi_i) \cdot \chi_i(1)$.*

Wir können die $\mathcal{A}_i$ auch anders beschreiben. Dafür sei $\rho_i : G \to Gl(W_i)$ ein vollständiges Repräsentantensystem von Darstellungen zu den irreduziblen Charakteren $\chi_1, \dots, \chi_h$ von $G$. Wir definieren die Garbe $Hom_G(W_i, \mathcal{A})$ für $U \subset X$ offen via

$$Hom_G(W_i, \mathcal{A})(U) := \{f : W_i \to \mathcal{A}(U) |\ f \text{ ist } \mathbb{C}[G]\text{-linear}\}$$

Durch $\rho_i \otimes id$ haben wir eine $G$-Operation auf $W_i \otimes_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, \mathcal{A})$.

**Lemma 4.3.5.** *Der $G$-lineare Morphismus*

$$W_i \otimes_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, \mathcal{A}) \to \mathcal{A},\ w \otimes f \mapsto f(w)$$

*induziert einen Isomorphismus auf $\mathcal{A}_i$.*

*Beweis.* Nach Lemma 5.2.6 und der Konstruktion der $\mathcal{A}_i$ wissen wir, daß die induzierte Abbildung ($x \in X(\mathbb{C})$ beliebig)

$$(W_i \otimes_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, \mathcal{A}))_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C} = W_i \otimes_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, \mathcal{A}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}) \to \mathcal{A}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathbb{C}$$

einen Isomorphismus auf $(\mathcal{A}_i)_x \otimes \mathbb{C}$ induziert. Wieder können wir [Liu02], Aufgabe 5.1.15 c) (Seite 174) anwenden und erhalten, daß $W_i \otimes_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, \mathcal{A})$ lokal frei vom selben Rang wie $\mathcal{A}_i$ ist. Benutzen wir Nakayama wie im Beweis von 4.3.3, erhalten wir einen Isomorpismus

$$(W_i \otimes_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, \mathcal{A}))_x \to (\mathcal{A}_i)_x,$$

und da der Morphismus an allen Halmen über die Halme von $\mathcal{A}_i$ faktorisiert, faktorisiert er über $\mathcal{A}_i$ (zum Beispiel sieht man das, wenn man zu Garbifizierung übergeht). □

**Notation 4.3.6.** Wir setzen zur Abkürzung $E_i := Hom_G(W_i, \mathcal{A})$. Setzen wir $n_i = \dim W_i = \chi_i(1)$ und vergessen für einen Moment die $G$-Operation, so haben wir eine Zerlegung von $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln

$$\mathcal{A} \cong \bigoplus W_i \otimes_{\mathbb{C}} E_i \cong \bigoplus E_i^{\oplus n_i}$$

gefunden.

### Die Zerlegung von $(\mathcal{A}, \nabla)$

Es sei $X$ eine glatte projektive Varietät über $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul mit einem integrierbaren Zusammenhang $\nabla$, $G$ eine endliche Gruppe und $\rho : G \to Aut(\mathcal{A}, \nabla)$ ein Gruppenhomomorphismus. Setzt sich unsere vorher gefundene Zerlegung zu einer Zerlegung von Komplexen fort? Wir analytifizieren und benutzen Satz 1.4.3. Dann ist die Frage, ob wir das zu $(\mathcal{A}, \nabla)$ gehörige lokale System $\mathfrak{A}$ zerlegen können.

**Lemma 4.3.7.** *Es gibt eine Zerlegung*

$$\mathfrak{A} \cong \bigoplus_{\chi_i \in \hat{G}} \mathfrak{A}_i$$

*von lokalen Systemen. Sind $W_i$, $1 \leq i \leq h$ irreduzible Darstellungen, die zu den verschiedenen irreduziblen Charakteren $\chi_i$, $1 \leq i \leq h$ gehören, so gilt*

$$\mathfrak{A}_i \cong W_i \otimes_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, \mathfrak{A}).$$

*Beweis.* Wir definieren den Charakter für den Gruppenhomomorphismus $r : G \to Aut_{lok.Syst.}(\mathfrak{A})$ als $\chi_r := \mathrm{Tr}(r_x)$, wobei $x \in X(\mathbb{C})$ beliebig und $r_x : G \to Aut_{\mathbb{C}}(\mathfrak{A}_x)$ die induzierte Abbildung ist. Offensichtlich ist die Abblidung $x \mapsto \mathrm{Tr}(r_x)$ konstant und $\chi_r$ damit wohldefiniert. Danach gehen wir analog zu vorher vor, nur daß die Situation einfacher ist. □

**Bemerkung 4.3.8.** Offensichtlich gilt $\chi_r = \chi_\rho$. Es sei $\mathcal{E}_i = Hom_G(W_i, \mathfrak{A})$. Die Zerlegung $\mathfrak{A} \cong \bigoplus_{i=1}^{h} \mathcal{E}_i^{n_i}$ liefert nach tensorieren mit $- \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ die in Notation 4.3.6 gefundene Zerlegung.

## Anwendung auf $(\pi_* \mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)$

**Lemma 4.3.9.** *Es sei $\rho : G \to Gl(V)$, $V \cong \mathbb{C}^r$, eine Darstellung von $G$, $\mathcal{E}$ das zugehörige lokale System und $E$ das zugehörige Vektorbündel. Dann gilt*

*(i)*

$$\mathcal{E} \cong Hom_G(V^*, \pi_* \mathbb{C}_Y),$$

*wobei die $G$-Operation auf $\pi_* \mathbb{C}_Y$ die kanonische ist.*

*(ii)*

$$E \cong Hom_G(V^*, \pi_* \mathcal{O}_Y),$$

*wobei die $G$-Operation auf $\pi_* \mathcal{O}_Y$ die kanonische ist.*

*Beweis.* (i) $\mathcal{E} \cong (\pi_*\pi^{-1}\mathcal{E})^{G,(\phi_\mathcal{E})} \cong \pi_*(V \otimes \mathbb{C}_Y)^G = Hom_G(V^*, \pi_*\mathbb{C}_Y)$.
(ii) $E \cong (\pi_*\pi^* E)^{G,(\phi_E)} \cong \pi_*(V \otimes \mathcal{O}_Y)^G = Hom_G(V^*, \pi_*\mathcal{O}_Y)$. □

Wir fixieren ein vollständiges Repräsentantensystem irreduzibler Darstellungen $\rho_i : G \to Gl(W_i)$ mit Charakter $\chi_i$. Also können wir die Vektorbündel, die zu den irreduziblen Darstellungen via Monodromie korrespondieren, als

$$E_i := Hom_G(W_i^*, \pi_*\mathcal{O}_Y)$$

beschreiben. Nun wissen wir nach 4.3.6, daß $\pi_*\mathcal{O}_Y$ mit der kanonischen $G$-Operation bzgl. des dualen Repräsentantensystems $W_1^*, \ldots, W_h^*$ eine Zerlegung

$$(\star) \quad \pi_*\mathcal{O}_Y \cong \bigoplus E_i^{\oplus n_i}, \quad n_i = \dim W_i^*$$

besitzt. Es folgt unmittelbar

**Lemma 4.3.10.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine $G$-Galoisüberlagerung komplexer projektiver glatter Varietäten.*

*(i) Das Vektorbündel $\pi_*\mathcal{O}_Y$ ist $\pi^*$-trivial und korrespondiert via Monodromie zur regulären Darstellung[10] von $G$.*

*(ii) Die kanonische $G$-Garbenstruktur auf $\mathcal{O}_Y$ liefert eine kanonische $G$-Operation auf $\pi_*\mathcal{O}_Y$. Der zu dieser Operation in 4.3.1 definierte Charakter ist der reguläre.*

*Also korrespondiert $(\star)$ via Monodromie zur Zerlegung der regulären Darstellung in irreduzible Darstellungen.*

*Beweis.* (i) Da $\pi^* E_i \cong \mathcal{O}_Y^{n_i}$ gilt, folgt $\pi^*\pi_*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y^{\sum n_i^2 = |G|}$. Die zugehörige Monodromie-Darstellung ist $\bigoplus W_i^{n_i}$, i.e. regulär.
(ii) Es sei $\chi$ der in 4.3.1 definierte Charakter bzgl. der kanonischen Operation auf $\pi_*\mathcal{O}_Y$. Wir wissen bereits, daß $\mathrm{Rang}(E_i) = n_i = (\chi, \chi_i)$ gilt. Also ist $\chi$ der reguläre Charakter. □

**Bemerkung 4.3.11.** Insbesondere ist jedes $\pi^*$-triviale Vektorbündel eine direkte Summe der $E_i$´s.

[10]Erinnerung an die reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe $G$: Es sei $V := \prod_{g \in G} \mathbb{C}$, $r^G : G \to Gl(V)$ definiert durch $r_g^G(e_1) = e_g$. Jede zu dieser isomorphe Darstellung nennen wir ebenfalls regulär, den zugehörigen Charakter $\chi_G$ nennen wir den regulären Charakter. Er ist dadurch eindeutig bestimmt, daß $(\chi_G, \chi_i) = \chi_i(1)$ für alle irreduziblen Charaktere $\chi_i$ gilt, siehe [Ser82], Seite 18, Corollary 1

## 4.4 Verallgemeinerung des Beweises von Pink und Rössler

Hier geben wir einen zweiten Beweis von Satz 4.2.1.

*Beweis.* Nach der Diskussion in Abschnitt 4.2.3 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\rho$ und damit auch $\rho'$ irreduzibel sind. Es seien wieder $\rho_i : G \to Gl(W_i)$ mit Charakter $\chi_i$, $1 \le i \le h$ ein vollständiges Repräsentantensystem der irreduziblen Darstellungen von $G$. Wir bezeichnen mit $E_i$, $1 \le i \le h$ die zugehörigen Vektorbündel, i.e. es gibt $i, \tau(i) \in \{1, \ldots, h\}$, so daß $E_\rho = E_i,\ E_{\rho'} = E_{\tau(i)}$. Wir wissen, daß

$$(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y) \cong \bigoplus_{i=1}^{h} W_i^* \otimes_{\mathbb{C}} (E_i, \nabla_i),$$

und daß die kanonische $G$-Operation auf der rechten Seite $\bigoplus \rho_i^* \otimes id$ ist. Nun betrachten wir die Hyperkohomologie dieser Komplexe:

Es gilt $\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y) \cong \mathbb{H}^j(\mathcal{O}_Y, d_Y) \cong \mathrm{H}^j(Y, \mathbb{Q}_Y) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, und genau wie im Beweis von Pink und Rössler ist die kanonische $G$-Operation auf $(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)$ mit diesem Isomorphismus verträglich, siehe Bemerkung 2.3.8. Damit können wir den gleichen Trick wie früher anwenden. Für jeden Körperautomorphismus $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^j(Y, \mathbb{Q}_Y) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \arrow[r, "id\otimes\tau"] \arrow[d, "\sigma_{\mathbb{Q},g}\otimes id"] & \mathrm{H}^j(Y, \mathbb{Q}_Y) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \arrow[d, "\sigma_{\mathbb{Q},g}\otimes id"] \\
\mathrm{H}^j(Y, \mathbb{Q}_Y) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \arrow[r, "id\otimes\tau"] & \mathrm{H}^j(Y, \mathbb{Q}_Y) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

wobei $\sigma_{\mathbb{Q},g}$ die oben erwähnte $G$-Operation ist. Wir erhalten einen $\tau$-linearen Automorphismus $\tilde{\tau} : \mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y) \to \mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)$, der mit der $G$-Operation kommutiert (wählt man eine $\mathbb{Q}$-Basis $(q_i)$ von $\mathrm{H}^j(Y, \mathbb{Q}_Y)$ und eine Basis $(e_i)$ von $\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)$, die auf $q_i \otimes 1$ abbildet, so gilt

$$\tilde{\tau} : \mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y) \to \mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y),\ \sum \lambda_i e_i \mapsto \sum \tau(\lambda_i) e_i,$$

aber es ist im Allgemeinen nicht so, daß man eine solche Basis finden kann, die die direkte Summenzerlegung bezüglich der $G$-Operation respektiert). Das können wir auch in einem kommutativen Diagramm ausdrücken, wobei wir die Gruppenoperation von $G$ auf $\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)$ als Darstellung von $G$ sehen

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "R"] \arrow[dr, "R"'] & Gl(\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)) \arrow[d, "\tilde{\tau}"] \\
& Gl(\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)).
\end{tikzcd}$$

Nimmt man die Darstellung in der oben erwähnten Basis $(e_i)$, so gilt

$$\tilde{\tau} : Gl(\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)) \to Gl(\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y)),\ A = (a_{st})_{st} \mapsto \tilde{\tau}(A) = (\tau(a_{st}))_{st},$$

insbesondere erhalten wir für den Charakter der Darstellung

$$\chi_R = \tau \circ \chi_R$$

Nun wissen wir nach Lemma 4.3.10, daß

$$\mathbb{H}^j(\pi_*\mathcal{O}_Y, \pi_* d_Y) \cong \bigoplus_{i=1}^{h} W_i^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}^j(E_i, \nabla_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{h} (W_i^*)^{h^j_{dR}(E_i, \nabla_i)},$$

das heißt wir kennen die Zerlegung von $\chi_R$ in irreduzible Charaktere

$$\chi_R = \sum_{i=1}^{h} h^j_{dR}(E_i)\chi_i^*.$$

Die Gleichung $\chi_R = \tau \circ \chi_R$ impliziert nun

$$h^j_{dR}(E_i, \nabla_i) = h^j_{dR}(E_{\tau(i)}, \nabla_{\tau(i)})$$

In Kapitel 1 im Abschnitt 1.3 über die Degeneration von Hodge-nach-de Rham-Spektralsequenzen, besagt Lemma 1.3.3 gerade, daß

$$h^j_{Hdg}(E_s) = h^j_{dR}(E_s, \nabla_s),\ 1 \le s \le h,$$

somit folgt die Behauptung. $\square$

# 5 Anhang

## 5.1 G-Garben

Eine $G$-Garbenstruktur ist ein Abstiegsdatum für Garben auf einer Galoisüberlagerung. Im ersten Abschnitt erklären wir den Begriff einer $G$-Garbe für eine topologische Galoisüberlagerung. Im zweiten Abschnitt wiederholen wir den klassischen $G$-Garbenbegriff von Mumford in der Situation einer algebraischen Galoisüberlagerung.

### 5.1.1 Was ist eine $G$-Garbe? -topologisch

Sei $Y$ ein topologischer Raum, auf dem eine Gruppe $G$ durch Morphismen operiert. Für $g \in G$ bezeichnen wir den Automorphismus $g : Y \to Y$ auch mit $g$.
Erinnerung: Es sei $F$ eine Garbe[1] auf $Y$, $g \in G$. In diesem Fall gilt für $U \subset Y$ offen

$$g^{-1}F(U) = F(g(U)).$$

**Definition 5.1.2.** Eine Garbe $F$ auf $Y$ heißt $G$-Garbe, falls es für $g \in G$ einen Morphismus $\phi_g : g^{-1}F \to F$ gibt und für alle $g, h \in G$, $U \subset Y$ offen das folgende Diagramm kommutativ ist

$$\begin{tikzcd} F(g(h(U))) \arrow[r, "\phi_g(h(U))"] \arrow[d, "="] & F(h(U)) \arrow[d, "\phi_h(U)"] \\ F(gh(U)) \arrow[r, "\phi_{gh}(U)"] & F(U). \end{tikzcd}$$

(Insbesondere ist $\phi_g$ dann ein Isomorphismus von Garben.)

Sei $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung, $G := Aut_X(Y)$. Sei $E$ eine Garbe auf $X$, dann ist $\pi^{-1}E$ eine $G$-Garbe, denn $\pi \circ g = \pi$ für alle $g \in G$ induziert Isomorphismen $\phi_g : g^{-1}(\pi^{-1}E) \to \pi^{-1}E$. Andersherum gegeben eine $G$-Garbe $(F, (\phi_g)_{g\in G})$ auf $Y$, so operiert $G$ via $(\pi_*\phi_{g^{-1}})_{g\in G}$ durch Automorphismen auf $\pi_*F$. Denn für jede offene Menge $U \subset X$ ist das Urbild $\pi^{-1}(U)$ $G$-invariant (i.e. $g(\pi^{-1}(U)) = \pi^{-1}(U)\ \forall g \in G$). Wir definieren $(\pi_*F)^{G,(\phi)}$ als die Garbe der Invarianten unter dieser Operation. Insbesondere ist sie eine Untergarbe von $\pi_*F$.

[1] zum Beispiel mit Werten in abelschen Gruppen.

**Satz 5.1.3.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine topologische $G$-Galoisüberlagerung. Dann gibt es eine Äquvalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \big(Garben\ auf\ X\big) & \longleftrightarrow & \big(G - Garben\ auf\ Y\big) \\ E & \longrightarrow & (\pi^{-1}E, (\phi_g)_{g\in G}) \\ (\pi_* F)^{G,(\phi)} & \longleftarrow & (F, (\phi_g)_{g\in G}) \end{array}$$

*Beweis.* Offensichtlich sind die Zuordnungen funktoriell. Daß es sich dabei um eine Äquivalenz von Kategorien handelt, folgt aus Lemma 5.1.4 und Lemma 5.1.5. ☐

**Lemma 5.1.4.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine topologische $G$-Galoisüberlagerung. Der kanonische Morphismus $E \to \pi_*\pi^{-1}E$ faktorisiert als $E \to (\pi_*(\pi^{-1}E))^G \to \pi_*\pi^{-1}E$, und $E \to (\pi_*(\pi^{-1}E))^G$ ist ein Isomorphismus.*

**Beweis:** Es reicht, die Behauptung lokal nachzuprüfen. Wir betrachten nur die Situation $\pi : Y = X \times G \to X$ $,(x, g) \mapsto x$ und $g : Y \to Y$ $(x, h) \mapsto (x, gh)$. Wir schreiben $Y = \bigsqcup_{f\in G} X \times \{f\}$ und identifizieren $\pi^{-1}E(X \times \{f\}) = E(X) \times \{f\}$. Dann erhalten wir $(\pi^{-1})E(Y) = \prod_{f\in G} E(X) \times \{f\}$, und der kanonische Morphismus $E(X) \to (\pi^{-1}E)(Y)$ hat die Form $t \mapsto (t, t \ldots)$. Es reicht zu sehen, daß er einen Isomorphismus $E(X) \to (\pi^{-1}E)(Y)^G$ induziert:
Es gilt

$$\prod_{f\in G} E(X) \times \{f\} \xrightarrow{\phi_g(Y)} \prod_{f\in G} E(X) \times \{f\}$$
$$(t_f)_{f\in G} \mapsto (s_f)_{f\in G} \text{ mit } s_f := t_{g^{-1}f}\ \forall f \in G$$

Also gilt $(\pi^{-1}E)(Y)^G = \{(t_f)_{f\in G} \in \prod_{f\in G} E(X) \times \{f\} |\ t_f = t_{gf} \forall g \in G\}$, somit ist die Abbildung

$$E(X) \to (\pi^{-1}E)(Y)^G,\ t \mapsto (t, t, \ldots)$$

ein Isomorphismus. ☐

**Lemma 5.1.5.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine topologische $G$-Galoisüberlagerung, $(F, (\phi_g)_{g\in G})$ eine $G$-Garbe auf $Y$. Dann induziert die Inklusion $(\pi_*F)^G \hookrightarrow \pi_*F$ via Adjunktion eine Abbildung von Garben*

$$\pi^{-1}((\pi_*F)^G) \xrightarrow{j} F,$$

*die ein Isomorphismus von $G$-Garben ist.*

*Beweis.* Um nachzurechnen, daß $j$ ein Isomorphismus ist, können wir wieder die Situation lokal betrachten. Also ohne Einschränkung gilt wieder $\pi : Y = X \times G = \bigsqcup_{f\in G} X \times \{f\} \to X$ $,(x, g) \mapsto x$ und $g : Y \to Y$ $(x, h) \mapsto (x, gh)$.

Zur Abkürzung setzen wir $E := (\pi_* F)^G$, $j$ faktorisiert als $\pi^{-1}E \hookrightarrow \pi^{-1}\pi_* F \to F$, wobei der Morphismus $\pi^{-1}\pi_* F \to F$ der kanonische ist. Auf $X \times \{h\}$, $h \in G$ gilt

$$\pi^{-1}\pi_* F(X \times \{h\}) = F(\pi^{-1}(X)) = \prod_{f \in G} F(X \times \{f\}) \to F(X \times \{h\})$$

ist nur die Projektion auf den $h$-Faktor, und

$$(\pi^{-1}E)(X \times \{h\}) = E(X) = F(\pi^{-1}(X))^G$$

$$= \{(t_f)_{f \in G} \in \prod_{f \in G} F(X \times \{f\}) |\ t_f = \phi_g(X \times \{f\})(t_{gf})\ \forall f, g \in G\}.$$

Wir sehen, daß $j : (\pi^{-1}E)(X \times \{h\}) \to F(X \times \{h\})$ eine Umkehrabbildung definiert durch

$$\begin{aligned} j^{-1} : F(X \times \{h\}) &\to (\pi^{-1}E)(X \times \{h\}) \\ s_h &\mapsto (t_f)_{f \in G} \text{ mit } t_f = \phi_{fh^{-1}}(U \times \{f\})^{-1}(s_h),\ f \in G \end{aligned}$$

hat. Es bleibt zu zeigen, daß $j$ ein $G$-Garbenmorphimus ist. Also betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (g^{-1}\pi^{-1}E)(X \times \{h\}) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\psi_g(X \times \{h\})"] & g^{-1}F(X \times \{h\}) \arrow[d, "\phi_g(X \times \{h\})"] \\ (\pi^{-1}E)(X \times \{h\}) \arrow[r, "j"] & F(X \times \{h\}), \end{tikzcd}$$

wobei $(\psi_g)_{g \in G}$ die kanonische $G$-Garbenstrukur auf $\pi^{-1}E$ ist, also gilt

$$\psi_g(X \times \{h\}) : (g^{-1}\pi^{-1}E)(X \times \{h\}) = E(X) \xrightarrow{id} E(X) = (\pi^{-1}E)(X \times \{h\}).$$

Nun sei $t = (t_f)_{f \in G} \in \pi^{-1}E)(X \times \{gh\})$, dann gilt per Definition

$$t_h = \phi_g(X \times \{h\})(t_{gh}),$$

mit anderen Worten

$$j(X \times \{h\})(t) = \phi_g(X \times \{h\}) \circ j(X \times \{gh\})(t),$$

und somit ist das Diagramm kommutativ.

$\square$

**Geben wir eine Garbe von Ringen $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ auf $X$ vor, wie können wir dann die Unterkategorie der $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Moduln als $G$-Garben auf $Y$ beschreiben?** Es sei $i_g : g^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \to \pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$, $g \in G$ die kanonische $G$-Garbenstruktur. Ist $E$ ein $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul, so ist die kanonische $G$-Garbenstruktur $\phi_g : g^{-1}\pi^{-1}E \to \pi^{-1}E$, $g \in G$ bezüglich $(i_g)_{g\in G}$ linear (i.e. $\phi_g(se) = i_g(s)\phi_g(e)$ für $s \in g^{-1}\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}(U)$, $e \in g^{-1}\pi^{-1}E(U)$).
Andersherum ist für eine $G$-Garbe $F$ mit $(i_g)_{g\in G}$-linearer $G$-Garbenstruktur die induzierte $G$-Operation auf $\pi_*F$ bezüglich $(\pi_*\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}})^{G,(i)} \cong \mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ linear. Also ist $(\pi_*F)^G$ ein $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$-Modul.
Unmittelbar folgt

**Korollar 5.1.6.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine topologische $G$-Galoisüberlagerung, $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ eine Garbe von Ringen auf $X$ mit zugehöriger $G$-Garbe $(\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}, (i_g)_{g\in G})$. Dann schränkt sich die Äquivalenz von Kategorien aus Satz 5.1.3 ein zu*

$$\big(\mathcal{O}_{\mathrm{X}}\text{-}\mathit{Moduln}\big) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}}\text{-}\mathit{Moduln\ mit}\ (i_g)_{g\in G}\text{-}\mathit{linearer} \\ G\text{-}\mathit{Garbenstruktur} \end{pmatrix}.$$

In dem Fall $\mathcal{O}_{\mathrm{X}} = \mathbb{C}_X$ ist $\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{X}} \cong \mathbb{C}_Y$ und die $G$-Garbenstruktur für $U \subset Y$ offen und zusammenhängend durch

$$i_g(U) : \mathbb{C}_Y(gU) = \mathbb{C} \xrightarrow{id} \mathbb{C} = \mathbb{C}_Y(U)$$

gegeben. Also besagt das vorige Korollar

**Korollar 5.1.7.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine $G$-Galoisüberlagerung. Es gibt eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathbb{C}_X\text{-}\mathit{Moduln}\big) & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \mathbb{C}_Y\text{-}\mathit{Moduln\ mit}\ \mathbb{C}-\mathit{linearer} \\ G\text{-}\mathit{Garbenstruktur} \end{pmatrix} \\ \mathcal{E} & \longrightarrow & (\pi^{-1}\mathcal{E}, (\phi_g)_{g\in G}) \\ (\pi_*\mathcal{F})^{G,(\phi)} & \longleftarrow & (\mathcal{F}, (\phi_g)_{g\in G}). \end{array}$$

*Dabei korrespondieren lokal freie $\mathbb{C}_X$-Moduln zu lokal freien $\mathbb{C}_Y$-Moduln vom selben Rang.*[2]

### 5.1.8 Was ist eine $G$-Garbe? -algebraisch

Bzw. was ist eine ($\mathcal{O}_Y$-lineare) $G$-Garbe?

[2] ein $\mathbb{C}_X$-Modul $\mathcal{E}$ ist genau dann lokal frei vom Rang $r$, wenn $\pi^{-1}\mathcal{E}$ lokal frei vom Rang $r$ ist. Das folgt daraus, daß $\pi$ ein lokaler Isomorphismus ist.

**Definition 5.1.9.** Es sei $G$ eine endliche Gruppe, die auf einem Schema $(Y, \mathcal{O}_Y)$ durch Automorphismen operiert. Eine ($\mathcal{O}_Y$-lineare[3]) $G$-Garbe besteht aus einem $\mathcal{O}_Y$-Modul $F$ zusammen mit einer Familie von $\mathcal{O}_Y$-linearen Morphismen

$$\psi_g : g^*F \to F, \; g \in G,$$

so daß für alle $g, h \in G$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} h^*g^*F \arrow[r, "h^*(\psi_g)"] \arrow[d, "\cong"] & h^*F \arrow[d, "\psi_h"] \\ (gh)^*F \arrow[r, "\psi_{gh}"] & F. \end{tikzcd}$$

Die $\mathcal{O}_Y$-lineare $G$-Garbenstruktur (auf einem kohärenten Modul) entspricht bei einer $G$-Galoisüberlagerung $\pi : Y \to X$ dem Abstiegsdatum entlang $\pi$ (vergleiche [BLR90] Kapitel 6). Anders gesagt

**Satz 5.1.10.** *Es sei $\pi : Y \to X$ eine algebraische $G$-Galoisüberlagerung[4]. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \textit{kohärente} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{X}}\textit{-Moduln} \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \textit{kohärente } \mathcal{O}_Y\textit{-Moduln mit} \\ \mathcal{O}_Y\textit{-linearer } G\textit{-Garbenstruktur} \end{pmatrix} \\ E & \longrightarrow & (\pi^*E, (\psi_g)_{g\in G}) \\ (\pi_*F)^{G,(\psi)} & \longleftarrow & (F, (\psi_g)_{g \in G}). \end{array}$$

*Lokal freie Garben korrespondieren zu lokal freien Garben vom gleichen Rang.*

*Beweis.* Siehe [Mum74], Seite 70, Proposition 2. □

**Bemerkung 5.1.11.** Falls $X, Y$ eigentlich über dem Basiskörper $\mathbb{C}$ sind, kann man einen Beweis des vorigen Satzes mit Hilfe der Analytifizierung (siehe Satz 1.1.7, (ii)) und Korollar 5.1.6 aus dem vorigen Abschnitt geben. Man zeigt einfach, daß $(\pi^{\mathrm{an}})^{-1}\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} \to \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$ ein Isomorphismus von $G$-Garben im Sinne von Definition 5.1.2 ist. Also kann man in Korollar 5.1.6 $(\pi^{\mathrm{an}})^{-1}\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ durch $\mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$ ersetzen, und man überlegt sich, wie man die $G$-Garbenstruktur linearisiert.

[3] Dieses Adjektiv ist nicht üblich. Wir benutzen es nur zur Unterscheidung von unser ersten Definition einer $G$-Garbe.

[4] $X, Y$ müssen nicht irreduzibel sein.

## 5.2 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

Die Beweise findet man auf den ersten Seiten von [Ser82], die hier gewählte Reihenfolge ist beweistechnisch nicht logisch. In diesem Abschnitt sei $G$ eine endliche Gruppe.

**Definition 5.2.1.** —-`Einführung der Grundbegriffe`

(i) Es sei $G$ eine endliche Gruppe. Eine *lineare Darstellung* von $G$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to Gl(V), g \mapsto \rho_g$ , wobei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist.

(ii) Zwei Darstellungen $\rho : G \to Gl(V)$, $\rho' : G \to Gl(V')$ heißen *isomorph*, falls es einen Vektorraumisomorphismus $\tau : V \to V'$ gibt mit $\rho_g = \tau^{-1}\rho'_g\tau \; \forall g \in G$.

(iii) Wir nennen $\rho : G \to Gl(V)$ *irreduzibel*, falls $V$ keine nichttrivialen $G$-invarianten Untervektorräume hat.

(iv) Wir definieren zu einer Darstellung $\rho$ den *Charakter* $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ via $\chi(g) := Tr(\rho_g)$ (wobei die Spur einer Matrix als die Summe der Diagonaleinträge definiert ist).

(v) Wir definieren zu einer Darstellung $\rho : G \to Gl(V)$ die *duale Darstellung* $\rho^* : G \to Gl(V^*)$ via $\rho^*_g := (\rho_{g^{-1}})^T : V^* \to V^*,\ g \in G$, wobei $(\rho_g)^T$ die duale Abbildung zu $\rho_g$ ist.

**Lemma 5.2.2.** *Es gilt $\rho \cong \rho'$ genau dann, wenn $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ gilt.*

*Beweis.* Siehe [Ser82], Corollary 2 auf Seite 16. □

**Satz 5.2.3.** *Es sei $H := \{f : G \to \mathbb{C} |\ f(g^{-1}sg) = f(s)\ \forall s, g \in G\}$ der Vektorraum der Klassenfunktionen, offensichtlich gilt $\dim_{\mathbb{C}} H =$ Anzahl der Konjugationsklassen von $G$. Auf $H$ haben wir ein Skalaprodukt gegeben durch*

$$(f, h) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\bar{h(g)}.$$

*Die Charaktere irreduzibler Darstellungen bilden eine Orthonormalbasis von $H$. Nimmt man das vorige Lemma hinzu, erhält man*

$$\hat{G} = \{\textit{Charaktere irred. Darstellungen von } G\} = \{\textit{Konjugationsklassen von } G\}$$

*Beweis.* Siehe [Ser82], Theorem 6 und Theorem 7 auf Seite 19. □

**Satz 5.2.4.** *Jede Darstellung $\rho : G \to Gl(V)$ läßt sich als direkte Summe irreduzibler Darstellungen $\rho_i : G \to Gl(W_i)$ schreiben. Durch Zusammenfassung von Summanden erhält man $V \cong \bigoplus V_i$ mit $V_i \cong W_i^{\oplus m_i}$, wobei $m_i = (\chi_\rho, \chi_{\rho_i})$ die Anzahl der Summanden isomorph zu $\rho_i$ angibt und somit nicht von der gewählten Zerlegung abhängt.*

*Beweis.* Siehe [Ser82], Theorem 4 auf Seite 16. $\square$

Der Isomorphismus $V \cong \bigoplus V_i$ in Satz 5.2.4 ist eindeutig im folgenden Sinne: Es seien $\chi_1, \ldots, \chi_h$ die verschiedenen Charaktere der irreduziblen Darstellungen mit Dimensionen $n_i = \chi_i(1)$ $(\in \mathbb{N})$

**Satz 5.2.5.** *Wir definieren*

$$p_i := \frac{n_i}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g^{-1}) \rho_g \ : V \to V$$

*dann ist $p_i$ Projektion auf $V_i$.*

*Beweis.* Siehe [Ser82], Theorem 8 auf Seite 21. $\square$

**Lemma 5.2.6.** *Es sei $V$ eine lineare Darstellung von $G$. Es sei $W_1, \ldots, W_h$ ein vollständiges Repräsentantensystem irreduzibler Darstellungen von $G$, $V = \bigoplus_{i=1}^h V_i$ mit $V_i = W_i^{\oplus m_i}$. Wir fixieren ein $i$, dann liefert der ($G$-lineare) Morphismus*

$$W_i \otimes_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, V) \to V, \ \ w \otimes f \mapsto f(w)$$

*einen Isomorphismus auf $V_i$.*

*Beweis.* Es gilt $Hom_G(W_i, V) = Hom_G(W_i, V_i)$, und $m_i = \dim_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, V)$ ist die Vielfachheit von $W_i$ in $V$, siehe [FH91] auf Seite 7, *Schurs Lemma* und Seite 16. Also hat die Darstellung $W_i \otimes_{\mathbb{C}} Hom_G(W_i, V)$ dieselbe Dimension wie $V_i$, und es reicht zu zeigen, daß der angegebene Morphismus surjektiv nach $V_i$ geht. Wir wählen eine Basis $e_1, \ldots, e_{n_i}$ von $W_i$, $e_1^{(j)}, \ldots, e_{n_i}^{(j)}$, $1 \leq j \leq m_i$ von $V_i$ und Inklusionen $f_j : W_i \to V_i, e_s \mapsto e_s^{(j)}$. Der oben angegeneme Morphismus bildet $e_s \otimes f_j$ auf $e_s^{(j)}$ ab, $1 \leq s \leq n_i, 1 \leq j \leq m_i$, und somit bildet er surjektiv auf $V_i$ ab. $\square$

# 6 Literaturverzeichnis


[BLR90] Bosch, S. ; Lütkebohmert, W. ; Raynaud, M.: *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3.Folge*. Bd. 21: *Néron Models*. Springer-Verlag, 1990

[Del70] Deligne, P.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 163: *Equations différentielles à points singuliers réguliers*. Springer-Verlag, 1970

[EV92] Esnault, H. ; Viehweg, E.: *DMV Seminar*. Bd. 20: *Lectures on Vanishing Theorems*. Birkhäuser Verlag, 1992

[FH91] Fulton, W. ; Harris, J.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 129: *Representation Theory*. Springer-Verlag, 1991

[Ful95] Fulton, W.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 153: *Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1995

[Gro61] Grothendieck, A. (Hrsg.): *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*. -, 1960-61 (Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois-Marie)

[Har77] Hartshorne, R.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 52: *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977

[Ill96] Illusie, L.: Frobenius et dégénérescence de Hodge. In: *Introduction à la théorie de Hodge* Bd. 3, SMF, 1996, S. 113–196

[Lan71] Lang, S.: *Algebra*. 4th printing. Addison-Wesley Publishing Company, 1971

[Liu02] Liu, Qing: *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 6: *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press, 2002

[Mat89] Matsumura, H.: *Commutative ring theory*. Cambridge University Press, 1989

[Mum74] Mumford, D.: *Abelian Varieties*. 2nd edition. Oxford University Press, 1974

[Mum88] Mumford, D.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1358: *The Red Book of Varieties and Schemes*. Springer-Verlag, 1988

[PR04] Pink, R. ; Roessler, D.: A Conjecture of Beauville and Catanese revisited. In: *Mathematische Annalen* 330 (2004), S. 293–308

[Ser56] Serre, J-P.: Géométrie algébrique et géométrie analytique. In: *Ann. inst. Fourier* 6 (1956), S. 1–42

[Ser82] Serre, J-P.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 42: *Linear Representations of Finite Groups*. Springer-Verlag, 1982

[SZ94] Stöcker, R. ; Zieschang, H.: *Algebraische Topologie*. Teubner Stuttgart, 1994

[Voi03] Voisin, C.: *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry II*. Cambridge University Press, 2003