Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing Wintersemester 2021/2022

Graphentheorie ☺ Übung 05

Aufgabe 11 und 12

a Es sei T ein Baum und e eine Kante von T. Zeigen Sie, dass es Bäume T_1 und T_2 gibt, so dass $T - e = T_1 \uplus T_2$ gilt.

b Es seien T_1 und T_2 disjunkte Bäume sowie $x_1 \in V(T_1)$ und $x_2 \in V(T_2)$. Der Graph $T := (V(T), E(T))$ sei definiert durch $V(T) := V(T_1) \uplus V(T_2)$ und $E(T) := E(T_1) \uplus E(T_2) \uplus \{x_1 x_2\}$. Zeigen Sie, dass T ein Baum ist.

c Es sei G ein zusammenhängender einfacher Graph und $T, T' \subset G$ aufspannende Bäume mit $T \neq T'$. Sei $e \in E(T) \setminus E(T')$ und $T - e = T_1 \uplus T_2$ wie in **a**. Definiere

$$\mathcal{E} := \{e' = x'y' \in E(T') \,|\, x' \in T_1, y' \in T_2\}.$$

1 Zeigen Sie, dass $\mathcal{E} \neq \varnothing$ gilt.

2 Zeigen Sie, dass $\mathcal{E} \cap E(T) = \varnothing$ gilt.

3 Zeigen Sie: Es gibt $e' \in \mathcal{E}$, so dass $T' \setminus \{e'\} \cup \{e\}$ aufspannender Baum von G ist.

4 Zeigen Sie: Für jedes $e' \in \mathcal{E}$ gilt, dass $T \setminus \{e\} \cup \{e'\}$ aufspannender Baum von G ist.

d Es sei G ein zusammenhängender einfacher Graph und $f : E(T) \to (0, \infty)$ eine injektive Abbildung. Zeigen Sie, dass es zu f genau einen minimalen aufspannenden Baum gibt.

Hinweis: Verwenden Sie **c3** oder **c4**.

Aufgabe 13 Diese Aufgabe wird Ihnen in den Übungen gestellt.

Abgabe: bis zum Dienstag den 23.11.2021 um 12 Uhr in den Lernräumen der Tutorinnen.