Universität Bielefeld
Dr. Jason Uhing Wintersemester 2021/2022

Graphentheorie ☺ Übung 06

Aufgabe 14 Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit $|V| \geq 3$ Ecken und

$$|E| > \binom{|V|-1}{2} + 2.$$

Zeigen Sie, dass G hamiltonsch ist.

Hinweis: Kontraposition mit Satz 3.23

Definition Es sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ die Eckenmenge eines Graphen G. Man nennt $(d_1, \ldots, d_n) := (d(v_1), \ldots, d(v_n))$ eine Eckengrad-Folge.

Aufgabe 15 Füllen Sie die Lücken im Beweis des folgenden Satzes:

Satz Es sei G ein einfacher Graph mit $n \geq 3$ Ecken und $(d_1, \ldots, d_n)$ eine Eckengrad-Folge von G mit $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Es gebe kein $m < \frac{1}{2}n$, so dass gilt: $d_m \leq m$ und $d_{n-m} < n - m$. Dann ist G hamiltonsch.

Beweis: Es sei $\mathrm{cl}(G)$ der Abschluss von G. Es seien $u, v \in V(\mathrm{cl}(G))$ nicht benachbarte Ecken mit $d(u)_{\mathrm{cl}(G)} \leq d_{\mathrm{cl}(G)}(v)$, so dass $d_{\mathrm{cl}(G)}(u) + d_{\mathrm{cl}(G)}(v) < n$ maximal ist. Definiere

$$T := \left\{x \in \mathrm{cl}(G) \mid x \not\sim_{\mathrm{cl}(G)} u\right\} \quad \text{und} \quad S := \left\{y \in \mathrm{cl}(G) \mid y \not\sim_{\mathrm{cl}(G)} v\right\}.$$

a Zeigen Sie $d_{\mathrm{cl}(G)}(u) < \frac{1}{2}n$. Bestimmen Sie $|T \cup \{u\}|$ und $|S|$.

b Definiere $m := d_{\mathrm{cl}(G)}(u)$. Zeigen Sie:

1 $|T \cup \{u\}| = n - m \quad$ und $\quad \forall x \in T \cup \{u\} : d_{\mathrm{cl}(G)}(x) < n - m$

2 $|S| \geq m \quad$ und $\quad \forall y \in S : d_{\mathrm{cl}(G)}(y) \leq m$

c Zeigen Sie $d_m \leq m$ und $d_{n-m} < n - m$.

Aufgabe 16 Diese Aufgabe wird Ihnen in den Übungen gestellt.

Abgabe: bis zum Dienstag den 30.11.2021 um 12 Uhr in den Lernräumen der Tutorinnen.