

## Graphentheorie ☺ Übung 10

**Aufgabe 26** Es sei  $G = (V, E)$  ein  $k$ -zusammenhängender Graph.

- 1 (Expansion Lemma) Der Graph  $H$  entstehe aus  $G$  durch Hinzunahme einer zusätzlichen Ecke  $y \notin V$ , die mit  $k$  Ecken  $x_1, \dots, x_k \in V$  verbunden wird, also

$$V(H) := V(G) \cup \{y\}, \quad E(H) := E(G) \cup \{yx_1, \dots, yx_k\}.$$

Zeigen Sie, dass  $H$   $k$ -zusammenhängend ist.

- 2 Es seien  $X, Y \subset V$  disjunkte nichtleere Mengen mit  $|X| = k = |Y|$ . Zeigen Sie, dass es Pfade  $P_1, \dots, P_k \in G$  gibt, so dass gilt:

a Die Startecke eines jeden Pfades ist in  $X$ , die Endecke in  $Y$ .

b  $\forall i \neq j \in \{1, \dots, k\} : V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset$

- 3 (Fan Lemma)

**Definition** Es sei  $G = (V, E)$  ein Graph,  $x \in V$  und  $X \subset V \setminus \{x\}$  mit  $|X| \geq k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Ein  $k$ -fan (Fächer) von  $x$  nach  $X$  besteht aus  $k$  Pfaden  $P_1, \dots, P_k \subset G$  so dass gilt

a  $\forall i \neq j \in \{1, \dots, k\} : V(P_i) \setminus \{\text{Startecke } P_i\} \cap V(P_j) \setminus \{\text{Startecke } P_j\} = \emptyset$

b  $\forall i \in \{1, \dots, k\} : \text{Startecke } (P_i) = x$  und Endecke  $(P_i) \in X$ .

Zeigen Sie: Ist  $G$   $k$ -zusammenhängend, dann gibt es einen  $k$ -Fächer von  $x$  nach  $X$ .

**Aufgabe 27** Es sei  $G = (V, E)$  ein einfacher Graph mit  $|V| \geq 3$  und Minimalgrad  $\delta(G) \geq |V| - 2$ . Zeigen Sie  $\delta(G) = \kappa(G)$ .

**Aufgabe 28** Diese Aufgabe wird Ihnen in den Übungen gestellt.