

Graphentheorie ☺ Übung 10

Aufgabe 26 Es sei $G = (V, E)$ ein k -zusammenhängender Graph.

- 1 (Expansion Lemma) Der Graph H entstehe aus G durch Hinzunahme einer zusätzlichen Ecke $y \notin V$, die mit k Ecken $x_1, \dots, x_k \in V$ verbunden wird, also

$$V(H) := V(G) \cup \{y\}, \quad E(H) := E(G) \cup \{yx_1, \dots, yx_k\}.$$

Zeigen Sie, dass H k -zusammenhängend ist.

- 2 Es seien $X, Y \subset V$ disjunkte nichtleere Mengen mit $|X| = k = |Y|$. Zeigen Sie, dass es Pfade $P_1, \dots, P_k \in G$ gibt, so dass gilt:

a Die Startecke eines jeden Pfades ist in X , die Endecke in Y .

b $\forall i \neq j \in \{1, \dots, k\} : V(P_i) \cap V(P_j) = \emptyset$

- 3 (Fan Lemma)

Definition Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, $x \in V$ und $X \subset V \setminus \{x\}$ mit $|X| \geq k$, $k \in \mathbb{N}$. Ein k -fan (Fächer) von x nach X besteht aus k Pfaden $P_1, \dots, P_k \subset G$ so dass gilt

a $\forall i \neq j \in \{1, \dots, k\} : V(P_i) \setminus \{\text{Startecke } P_i\} \cap V(P_j) \setminus \{\text{Startecke } P_j\} = \emptyset$

b $\forall i \in \{1, \dots, k\} : \text{Startecke } (P_i) = x$ und $\text{Endecke } (P_i) \in X$.

Zeigen Sie: Ist G k -zusammenhängend, dann gibt es einen k -Fächer von x nach X .

Aufgabe 27 Es sei $G = (V, E)$ ein einfacher Graph mit $|V| \geq 3$ und Minimalgrad $\delta(G) \geq |V| - 2$. Zeigen Sie $\delta(G) = \kappa(G)$.

Aufgabe 28 Diese Aufgabe wird Ihnen in den Übungen gestellt.