

Ausgewählte Kapitel aus der Mathematik



Probeklausur

Aufgabe 1 (2 + 4 + 4 + 4 = 14 Punkte)

- a) Formulieren Sie den Basisauswahlsatz.
b) Es sei

$$f(x_1, x_2, x_3) := (-x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_3, 2x_1 - x_2 + x_3)$$

eine lineare Abbildung.

- i) Definieren Sie die Matrix zu f . Bestimmen Sie die Matrix zu f .
ii) Bestimmen Sie den Rang von f und die Dimension des Kerns von f .
c) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (8 + 2 + 2 + 2 = 14 Punkte) Es sei $s \in \mathbb{R}$, $A \in \text{Mat}_{3,4}$ eine Matrix und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 2 \end{pmatrix}.$$

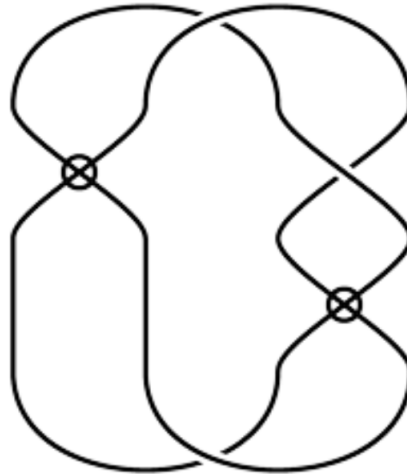
- a) Bestimmen Sie eine spezielle Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\vec{b})$. Diese sei mit $(A''|b')$ bezeichnet. Bestimmen Sie für jede elementare Umformung die Elementarmatrizen und schreiben Sie A'' als Produkt dieser Matrizen.
b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ ist das LGS lösbar?
c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{(A''|0)}$.
d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{(A|\vec{b})}$.

Aufgabe 3 ($2 + 2 + 2 + 4 = 10$ Punkte)

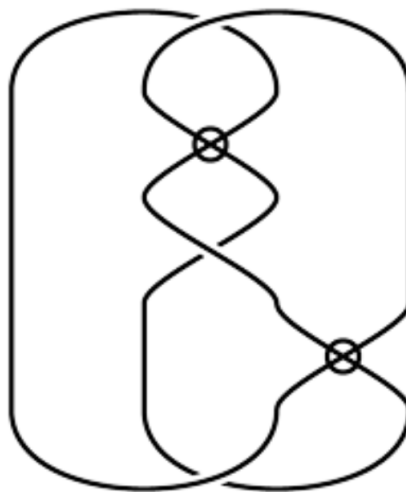
- a) Definieren Sie den Begriff Klammerpolynom eines virtuellen Verkettungsdiagramms.
- b) Definieren Sie den Begriff Vorzeichen einer Kreuzung.
- c) Definieren Sie den Begriff Selbstschnittzahl eines virtuellen Verkettungsdiagramms.
- d) Zeigen Sie, dass die Verschlingungszahl \mathcal{L}_j^i invariant unter der klassischen Reidemeisterbewegung II ist.

Aufgabe 4 ($8 + 2 = 10$ Punkte)

a) Berechnen Sie eine Färbung modulo 6 des folgenden Knotens:



b) Zeichnen und benennen Sie vertikale Spiegelbild des folgenden Diagramms:



Aufgabe 5 ($2 + 2 + 8 + 2 + 4 = 18$ Punkte)

- a) Formulieren Sie den Kleinen Satz von Fermat.
- b) Zeigen Sie, dass ein Gruppencode Einzelfehler erkennt.
- c) Bestimmen Sie zu $p = 7$ und $q = 11$ einen RSA-Modul und einen öffentlichen Schlüssel. Berechnen Sie daraus den privaten Schlüssel. Codieren Sie die Nachricht $m = 2$. Mit welcher Formel wird die codierte Nachricht entschlüsselt?
- d) Es sei C ein Paritätscode der Länge 4 zur Basis 8 mit den Gewichten

$$g_1 = 2, g_2 = 3, g_3 = 4, g_4 = 5.$$

- i) Schreiben Sie C formal auf.
- ii) Bestimmen Sie die Prüfziffer a_4 der Information 456.