

2.6.3 Verschlingungszahl

dfn:lk

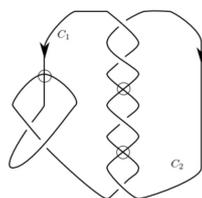
Definition 100. Es sei $D \in \mathcal{V}_d$ ein orientiertes Diagramm mit $n \in \mathbb{N}$ Komponenten C_1, \dots, C_n . Es sei $C_j^i(D)$ die Menge der Kreuzungen, an denen die Komponente C_i die Komponente C_j überkreuzt. Die Verschlingungszahl von C_i über C_j ist definiert durch

$$\mathcal{L}_j^i(D) := \sum_{c \in C_j^i(D)} \epsilon(c).$$

Bemerkung 101.

1. Für $C_j^i(D) = \emptyset$ ergibt sich $\mathcal{L}_j^i(D) = 0$.
2. Die Zahl $\mathcal{L}_j^i(D)$ hängt von der Nummerierung der Komponenten ab.

Beispiel 102. Für das folgende Diagramm D gilt $\mathcal{L}_1^2(D) = -3$ und $\mathcal{L}_2^1(D) = -1$.

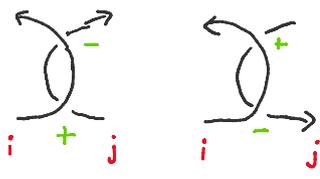


thm:lk

Satz 103. Die Verschlingungszahl \mathcal{L}_j^i ist invariant unter Diagrammbewegungen nummerierter, orientierter virtueller Diagramme.

Beweis Die Verschlingungszahl \mathcal{L}_j^i bleibt unverändert bezüglich dem virtuellen RMB, RMB I klassisch und ebener Isotopie.

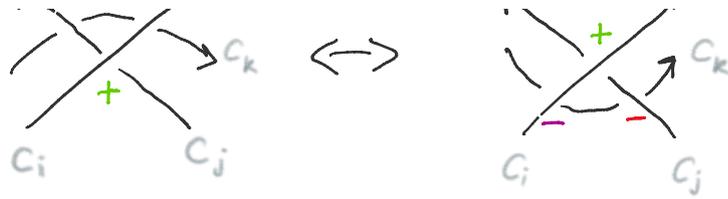
Zu prüfen sind also die klassischen RMB II und RMB III.

Zu RMB II:  liefern Beitrag Null zu \mathcal{L}_j^i . In allen anderen

Fällen (wenn j über i oder eine Komponente ist weder C_i noch C_j) ist lokal $C_j^i = \emptyset$ also auch Beitrag Null.

Zu RMB III: nach Übung 7 brauchen wir nur zwei Typen vom orientierten RMB III zu prüfen. Der erste Typ ist





Daran erkennt man, dass der lokale Anteil an \mathcal{L}_\pm^s im linken und rechten Diagramm gleich sind. Zum Beispiel werden

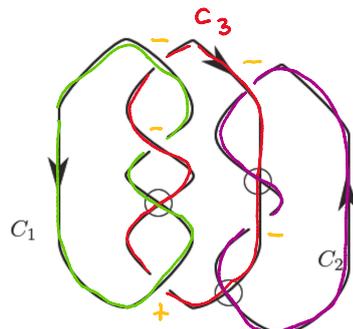
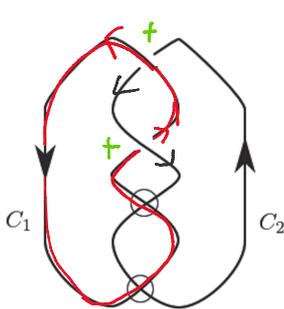
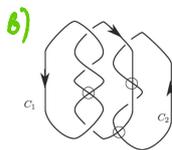
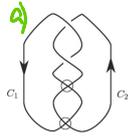
\mathcal{L}_k^i durch **lila -1**, \mathcal{L}_j^i durch **grün +1**, \mathcal{L}_k^j durch **rot -1** geliefert.

Für die zweite RMB III argumentiert man identisch. \square

Korollar 104 \mathcal{L}_j^i ist eine Verkettungsinvariante numerierter, orientierter virtueller Verkettungen.

Beweis Satz 103 und Korollar 96 \square

Beispiel 105



$$\mathcal{L}_2^1 = 1, \mathcal{L}_1^2 = +1$$

$$\mathcal{L}_2^1 = 0, \mathcal{L}_1^2 = 0, \mathcal{L}_3^1 = 0$$

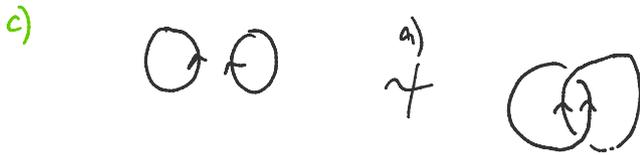
$$\mathcal{L}_1^3 = -1, \mathcal{L}_3^2 = 0, \mathcal{L}_2^3 = -2$$

c)



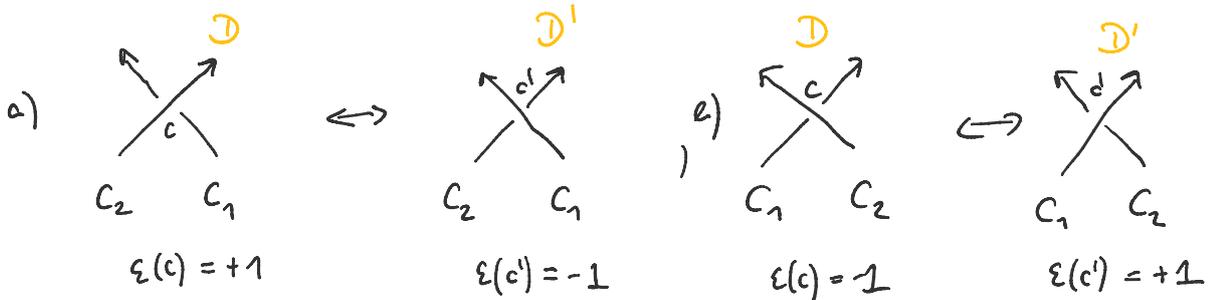
a)





Satz 106 Für eine klassische Verkettung L mit 2 Komponenten gilt $\mathcal{L}_2^1(L) = \mathcal{L}_1^2(L)$ in einem Diagramm D von L ohne virtuelle Kreuzungen

Beweis Es sei $c \in C_1^2(L)$ eine Kreuzung. Wir ändern die Kreuzung c in eine Kreuzung $c' \in C_2^1(L)$. Je nach Vorzeichen von c sieht das so aus:



Wir berechnen für a) : $\mathcal{L}_2^1(D') = \mathcal{L}_2^1(D) - 1$, $\mathcal{L}_1^2(D') = \mathcal{L}_1^2(D) - 1$

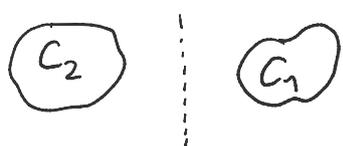
Wir berechnen für b) : $\mathcal{L}_2^1(D') = \mathcal{L}_2^1(D) + 1$, $\mathcal{L}_1^2(D') = \mathcal{L}_1^2(D) + 1$

Daraus ergibt sich sowohl aus a) als auch aus b) :

$$\mathcal{L}_2^1(D') = \mathcal{L}_2^1(D) - \varepsilon(c) , \quad \mathcal{L}_1^2(D') = \mathcal{L}_1^2(D) - \varepsilon(c).$$

Wir wählen nun in D Kreuzungen c_1, \dots, c_n aus so dass nach Ändern dieser Kreuzungen die Komponenten C_1 und C_2 nicht verschlungen sind : das geht, indem man an jeder Kreuzung wo C_1 über C_2 verläuft die Kreuzung so ändert, dass C_2 über C_1 verläuft. Insgesamt verläuft dann an allen

C_2 über C_1 verläuft. Insgesamt verläuft dann an allen Kreuzungen, wo C_1 und C_2 sich treffen, C_2 über C_1 und man kann C_2 mit klassischer RMB von C_1 trennen:


 Das geht weil man keine virtuellen Kreuzungen in \mathcal{D} hat.

Es sei \mathcal{D}' das Diagramm nach diesen Änderungen an c_1, \dots, c_n .

Sei $X := \sum_{i=1}^n \varepsilon(c_i)$. Dann folgt $\mathcal{L}_2^1(\mathcal{D}') = \mathcal{L}_2^1(\mathcal{D}) - X$

und $\mathcal{L}_1^2(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_1^2(\mathcal{D}') - X$. Also $\mathcal{L}_2^1(\mathcal{D}) = \mathcal{L}_2^1(\mathcal{D}') + X$
 $= 0 + X = \mathcal{L}_1^2(\mathcal{D}') + X = \mathcal{L}_1^2(\mathcal{D}) \quad \square$

Korollar 107 Für jede klassische Verkettung L gilt $\mathcal{L}_j^i(L) = \mathcal{L}_i^j(L) \quad \square$

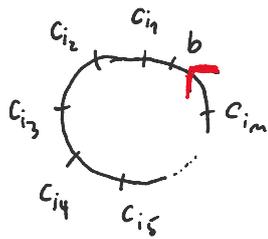
Bemerkung 108 Es sei $L \subset \mathcal{D}$ eine virtuelle Verkettung mit $\mathcal{L}_j^i(L) \neq \mathcal{L}_i^j(L)$ für zwei Komponenten C_i und C_j . Dann ist L nicht klassisch. Hat also kein Diagramm ohne virtuelle Kreuzungen. Das trifft für Beispiel 105 b zu.

Odd width (ungerade Selbstschnittzahl)

Es sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}_d$ ein orientiertes Knotendiagramm. Es seien c_1, \dots, c_n die klassischen Kreuzungen von \mathcal{D} . Wir wählen einen Punkt b auf dem Diagramm, wobei b keine Kreuzung sein

Punkt b auf dem Diagramm, wobei b keine Kreuzung sein darf. Gemäß der Orientierung durchlaufen wir D vom Startpunkt b aus. Daraus ergibt sich eine Liste von Kreuzungen, wo jede Kreuzung zweimal geordnet auftritt. Wir tragen b , die Orientierung und die Liste auf einem

Kreis ab:



Es sei $c_{ij} = c_{ik}$ mit $i < k$ also kommt c_{ij} vor c_{ik} auf dem Kreis auf. Wir verbinden

c_{ij} und c_{ik} mit einem Pfeil, der von c_{ij} nach c_{ik} gerichtet ist genau dann wenn man bei c_{ij} den überkreuzenden und bei c_{ik} den unterkreuzenden Strang durchläuft.

Schließlich fügen wir an jeden Pfeil das Vorzeichen der Kreuzung an: Ein solches Kreisdiagramm nennt man Gauss-Diagramm an D .

