

Prop 2.28 Sei $y \in P$ innerer Punkt und $\varepsilon > 0$ so dass $y \in B(y, \varepsilon) \subset P$. Weil $f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n a_i x_i$ linear ist, ist f stetig partiell diff. bar auf $B(y, \varepsilon)$.

Angenommen:

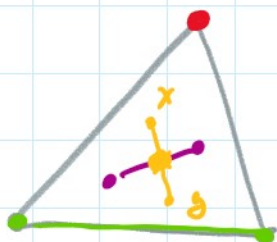
f in y lokales Maximum, dann gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Also $0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = a_i$,

also $f \equiv 0$ im $\downarrow$ $f \neq 0$. $\square$

Einschub zu Def. 2.2.9

$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in (0, 1) : \lambda x + (1-\lambda)y \in S \Rightarrow x, y \in S$



T Seite
S Seite
K keine Seite

$\exists x, y \in A \quad \exists \lambda \in (0, 1) : \lambda x + (1-\lambda)y \in S \wedge \neg (x, y \in S)$

Bemerkung 2.11. (ii) Seien $x, y \in A \setminus S$. Angenommen es

gibt $\lambda \in (0, 1)$ mit $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$. Dann:

S Sete

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \Rightarrow x, y \in S \quad \text{im } \downarrow \text{ an } x, y \in A \setminus S \quad \square$$

Lemma 2.2.12

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) x ist ein Extrempunkt von A .
- (ii) x ist nur trivial konvex kombinierbar aus Punkten von A , d.h. falls $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ ist mit $y, z \in A$ und $0 < \lambda < 1$, so muss $y = z = x$ sein.
- (iii) $A \setminus \{x\}$ konvex.

i) $\Rightarrow$ ii) Seien $y, z \in A$ mit $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ und $\lambda \in (0,1)$

$\{x\}$ Sete

$$\Rightarrow y, z \in \{x\} \Rightarrow x = y = z$$

ii) $\Rightarrow$ i) zz: $\{x\}$ ist Sete. Seien $y, z \in A$ mit $\lambda y + (1-\lambda)z$

$\in \{x\} \xRightarrow{\text{ii)}} y = z = x \Rightarrow y, z \in \{x\} \Rightarrow \{x\}$ Sete

ii) $\Rightarrow$ iii) Seien $y, z \in A \setminus \{x\}$. Zu zeigen ist: $\forall \lambda \in [0,1]$:

$\lambda y + (1-\lambda)z \in A \setminus \{x\}$. Annahmen es gibt $\lambda \in [0,1]$

mit $\lambda y + (1-\lambda)z \notin A \setminus \{x\}$. Weil A konvex ist, ist

$[y, z] \subset A$, also ist $\lambda y + (1-\lambda)z \in \{x\} \xRightarrow{\text{ii)}} y = z = x$

$y = z = x$

iii) $\Rightarrow$ ii) Seien $y, z \in A$ mit $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, $\lambda \in (0,1)$.

Falls $y \neq x$ und $z \neq x$, muss $x \in A \setminus \{x\}$ sein dann

$A \setminus \{x\}$ konvex. Also oBdA $y = x$. Falls $z = x$ dann

$y = x = z$. Falls $z \neq x$; dann: $x = \lambda x + (1-\lambda)z$

$$\Rightarrow x(1-\lambda) = (1-\lambda)z \quad \lambda < 1 \Rightarrow x = z \Rightarrow x = y = z$$

□

Satz 2.2.13 Wegen $A \subset \{f \leq \alpha\}$ gilt

$$S = A \cap \{f \leq \alpha\} \cap \{f \geq \alpha\} = A \cap \{f \geq \alpha\}$$

$$= A \cap \{-f \leq -\alpha\}, \text{ also ist } S \text{ konvex:}$$

$\{-f \leq -\alpha\}$ konvex und somit S konvex (L 2.2.5)

zu zeigen bleibt: S Seite von A . Dazu seien $y, z \in A$ und

$\lambda \in (0,1)$ und $x := \lambda y + (1-\lambda)z \in S$. Dann rechne

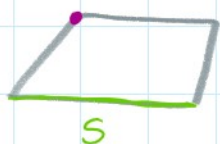
$$\alpha = f(x) = \lambda f(y) + (1-\lambda) \overbrace{f(z)}^{\leq \alpha} < \lambda \alpha + (1-\lambda) \alpha = \alpha$$

Angenommen: $f(y) < \alpha$, dann hier $\downarrow$. Also $f(y)$

$= \alpha$ und genauso $f(z) = \alpha$, daher $y, z \in S$ □

Satz 2.2.15 1) $A_e \cap S \subset S_e$: $x \in A_e \xrightarrow{2.2.12} A \setminus \{x\}$

konvex $\xRightarrow{S \subset A} S \setminus \{x\} = (A \setminus \{x\}) \cap S$ konvex $\xRightarrow{2.2.12} x \in S_e$



falls nur die triviale
Konvexkombi existiert, dann $x=y=z$

2) $S_e \subset A_e \cap S$: $S_e \subset S$ klar; $\underbrace{S_e}_{\text{S}} x \in S_e$ mit

2) $S_e \subset A_e \cap S$; $S_e \subset S$ klar ; $\text{Si } x \in S_e$ mit

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z \quad \text{mit } y, z \in A \quad \text{und } \lambda \in (0,1)$$

$$\begin{array}{ccccc} S \text{ Skt} & & x \in S_e & & 2.2.12 \\ \Rightarrow & y, z \in S & \Rightarrow & y = z = x & \Rightarrow x \in A_e \\ & & 2.2.12 & & \end{array}$$

□

Bem 2.2.17 (iii) A konvex $\Leftrightarrow k(A) = A$

$$\Rightarrow " \quad k(A) = \bigcap_{A \subset B, B \text{ konvex}} B \subset A$$

$$\Leftarrow " \quad \checkmark$$

□

(iv) A beschränkt $\Leftrightarrow k(A)$ beschränkt

$$\Leftarrow " \quad A \subset k(A) \quad \Rightarrow " \quad A \subset B(0, R) \quad \Rightarrow k(A)$$

$$= \bigcap_{A \subset B} B \subset B(0, R) \quad \square$$

Zu Satz 2.2.18

$$A = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$$

