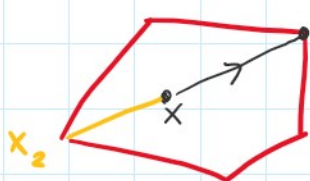


Beweis Satz 2.2.22 durch Induktion nach $m \in \mathbb{N}$. I. Anlag

$m=1$ ✓ $m \mapsto m+1$ Sei $P \subset \mathbb{R}^{n+1}$ beschränktes Polyeder.

und $x \in P \setminus P_e$. Zu zeigen ist also, dass x Konvexkombi-

aus max $m+2$ Punkten aus P_e ist. Sei $x' \in P_e$ und

$v := x' - x$  $x' = x_1 = x + t_1 v$ (siehe Beweis von K-M)

Dann: $x + t v \stackrel{!}{=} x + t(x' - x) \stackrel{!}{=} t \overset{EP}{x'} + (1-t) \overset{EP}{x} \in P$

denn P ist konvex. Sei nun $t_1 = \sup \{ t \geq 0 \mid x + t v \in P \}$

Wegen $x + 1 \cdot v = x' \in P$ folgt $t_1 \geq 1$. Annahme: $t_1 > 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x + t_1 v \in P &\Rightarrow \underline{x'} = \frac{x + t_1 v}{t_1} + \frac{(t_1 - 1)x}{t_1} \\ &= \frac{1}{t_1} \underbrace{(x + t_1 v)}_1 + \frac{t_1 - 1}{t_1} \cdot \overset{EP}{x} \quad \text{im } \downarrow \text{ an } x' \in P_e \end{aligned}$$

Insgesamt: $t_1 = 1 \Rightarrow x_1 := x + t_1 v = x + v = x'$

$\in P_e$. Dfm $t_2 := \sup \{ t \geq 0 \mid x - t_2 v \in P \}$ und

$x_2 := x - t_2 \overset{=v}{(x' - x)}$. Wie im K-M, und von dort weiß

man $x_2 \in S := P \cap \{ f_j = c_j \}$ wobei S Seite

von P und Polyeder im $\mathbb{R}^n$ ist (wie in K-M).

von P und Polyeder im $\mathbb{R}^n$ ist (wie in K-M).

Nach IV ist x_2 Konvexkombi von max $n+1$

Punkten aus $S_e = P_e \cap S \subset P_e$. Also

$$\frac{t_2}{1+t_2} \overbrace{x_1}^{\in P_e} + \frac{1}{1+t_2} \overbrace{x_2}^{\in P_e} = \frac{t_2}{1+t_2} x' + \frac{1}{1+t_2} x_2 =$$

$$= \frac{x(1+t_2) - x_2}{1+t_2} + \frac{1}{1+t_2} x_2 = x$$

⊗

$$\Leftrightarrow t_2 x' = x - x_2 + t_2 x$$

Damit ist x Konvexkombi von max $n+2$ Punkten aus

P_e $\square$

Beweis 1 Korollar 2.2.24 Sei $d := \sup \{ f(x) \mid x \in P \} \in \mathbb{R}$

und $y_0 \in P$ mit $f(y_0) = d$. Nach Caratheodory

gibt es $x_1, \dots, x_{n+1} \in P_e$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}^+$

mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ so dass: $y_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ also

$$d = f(y_0) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) < d$$

Annahme: $\forall i \in \{1, \dots, n+1\} : f(x_i) < d$. Widerspruch,

also gibt es $j \in \{1, \dots, n+1\}$ mit $f(x_j) = d$ $\square$

also gibt es $j \in \{1, \dots, m+1\}$ mit $f(x_j) = \alpha$ $\square$

Beweis 2 Korollar 2.2.24 Sei α wie oben. Dann ist

$P' := P \cap \{f = \alpha\}$ ein nichtleeres beschränktes Polyeder

und daher $(P')_e \neq \emptyset$ (nach K-M: $P' = k((P')_e)$)

Für $x_0 \in (P')_e = P' \cap P_e \subset P_e$ gilt:

$$x_0 \in (P')_e \subset P' = P \cap \{f = \alpha\} \Rightarrow f(x_0) = \alpha \quad \square$$

Beweis Satz 2.3.1 (i) Angenommen $x \in P_e$

$$\boxed{1} \quad I := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid f_i(x) = c_i\} \neq \emptyset : I = \emptyset \Rightarrow$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x) < c_i \Rightarrow x \in \overset{\circ}{P} \not\subset (x \in P_e)$$

$$\boxed{2} \quad x \text{ löst also das GLS } f_i(z) = c_i, \quad i \in I \stackrel{\boxed{1}}{\neq} \emptyset$$

$$\boxed{3} \quad \text{Annahme: } G := \{x + tv \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ ist}$$

$$\text{Lsg von GLS, also } f_i(x + tv) = c_i, \quad i \in I, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{3a} \quad i \in \{1, \dots, m\} \setminus I : f_i(x) < c_i \stackrel{\text{stetig}}{\Rightarrow} \exists t > 0 :$$

$$f_i(x \pm tv) < c_i \stackrel{\boxed{3}}{\Rightarrow} x \pm tv \in P \Rightarrow x =$$

$$= \frac{1}{2}(x + tv) + \frac{1}{2}(x - tv) \text{ Konvexkombi in } P \Rightarrow$$

$$x \notin P_e \quad \downarrow$$

$$\boxed{3b} \quad \{1, \dots, m\} = I \Rightarrow G \subset L = \{z \in \mathbb{R}^n \mid f_i(z) = c_i, \\ i \in \{1, \dots, m\}\} \xRightarrow{\text{wie in 3a}} \text{Widerspruch zu } x \in P_e$$

$$\boxed{4} \quad \text{Also } x \text{ eindeutige Lösung} \Rightarrow \text{Rang GLS} = \\ = \text{maximal} = n \Rightarrow \exists f_{i_1}, \dots, f_{i_n}, i_k \in I \\ \text{unabhängige Linearformen dessen Lösung } x \text{ ist.}$$

$$\boxed{5} \quad \text{Jedes } x \in P_e \text{ liefert ein eindeutig lösbares GLS} \\ (\text{wie oben konstruiert}), \text{ also } |P_e| \leq \# \text{ eindeutig} \\ \text{lösbarer GLS} \leq n \text{ Liformen aus } m \text{ auswählen.}$$

$$= \binom{m}{n} \quad \square (i)$$