

Proposition 4.6.5

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $N = \{1, \dots, n\}$ die Spielermenge und S_k deren Strategiemengen.

Für $K \subset N$ sei S_K die Menge der Strategien der Koalitionäre aus K , also

$S_K = \times_{k \in K} S_k$. Wir definieren $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$v(K) := \sup_{x \in S_K} \inf_{y \in S_{N-K}} \sum_{k \in K} a_k(x, y). \quad v(\emptyset) := 0$$

Dann ist v eine charakteristische Funktion.

Beweis [1] v ist wohldefiniert, falls $S_i, i \in \{1, \dots, n\}$ endlich sind oder $a_i, i \in \{1, \dots, n\}$, stetig / beschränkt sind.

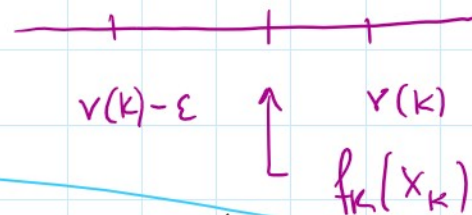
Dann werden Max und Min (= Sup und Inf) angenommen.

mer. [2] $v(\emptyset) = 0 \checkmark$

[3] Bleibt zu zeigen: Subadditivität. Zur Abkürzung

$$\text{sei } f_K(x) := \inf_{y \in S_{N-K}} \sum_{k \in K} a_k(x, y). \quad \text{Also } v(K) =$$

$$= \sup_{x \in S_K} f_K(x).$$



Sei $\epsilon > 0$. Zu $K \subset N$ gibt es also $x_K \in S_K$

mit $f_K(x_K) \geq v(K) - \epsilon$ (weil $v(K)$ Supremum) (X)

Betrachte nun eine disjunkte Zerlegung von K ,

1. 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

also $K = K_1 \cup K_2$ und $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Für

$x_K := (x_{K_1}, x_{K_2}) \in S_K$ ergibt sich:

$$\underline{v(K_1 \cup K_2)} = v(K) \geq f_K(x_K)$$

$$= \inf_{y \in S_{N \setminus K}} \left(\sum_{k \in K_1} a_k(x_{K_1}, y) + \sum_{k \in K_2} a_k(x_{K_2}, y) \right)$$

$$\geq \inf_{y \in S_{N \setminus K}} \sum_{k \in K_1} a_k(x_{K_1}, y) + \inf_{y \in S_{N \setminus K}} \sum_{k \in K_2} a_k(x_{K_2}, y)$$

$$\geq \inf_{y \in S_{N \setminus K_1}} \sum_{k \in K_1} a_k(x_{K_1}, y) + \inf_{y \in S_{N \setminus K_2}} \sum_{k \in K_2} a_k(x_{K_2}, y)$$

$$\uparrow K_1 \subset K \Rightarrow N \setminus K \subset N \setminus K_1$$

$$x_K = (x_{K_1}, x_{K_2})$$

$$= f_{K_1}(x_{K_1}) + f_{K_2}(x_{K_2}) \stackrel{(*)}{\geq} \underline{v(K_1)} - \varepsilon + \underline{v(K_2)} - \varepsilon$$

$\uparrow$ Einschränkung der a_k auf K_1 bzw. K_2

Für $\varepsilon > 0$ folgt die Behauptung $\square$

Lemma 4.6.14

Es sei (N, v) ein n -Personenspiel und w eine Imputation. Dann gilt für alle $K \subset N$:

$$\sum_{k \in K} w_k < v(K) \iff \left(\exists z \in I(v) \text{ mit } z \xrightarrow{K} w. \right) \quad (9)$$

Beim $\Leftarrow$ "zulässig" $v(K) \geq \sum_{k \in K} z_k$ Überlegen

Beweis " $\Leftarrow$ " $v(K) \geq \sum_{i \in K} z_i \stackrel{\text{zulässig}}{>} \sum_{i \in K} w_i \stackrel{\text{überlegen}}{>}$

" $\Rightarrow$ " [1] $d := v(K) - \sum_{k \in K} w_k$

$$z_k := \begin{cases} w_k + \frac{d}{|K|} & : k \in K \\ v(k) + \frac{1}{|N|-|K|} (v(N) - v(K) - \sum_{j \in N \setminus K} v(j)) & : k \in N \setminus K \end{cases}$$

[2] $k \in K$: $z_k \stackrel{\text{Imputation}}{>} w_k \geq v(k)$
Subadd

$k \in N \setminus K$: $v(K) + \sum_{j \in N \setminus K} v(j) \leq v(N)$

$\Rightarrow z_k \geq v(k) + 0$

Insgesamt Individuelle Rationalität und Überlegen-

heit von z

[3] z zulässig : $\sum_{k \in K} z_k = \sum_{k \in K} \left(w_k + \frac{d}{|K|} \right) = \sum_{k \in K} w_k + d$
 $= v(K)$

[4] Kollektive Rationalität :

$$\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k \in K} z_k + \sum_{k \in N \setminus K} z_k =$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n v_k \cdot \sum_{k \in K} -k \cdot \sum_{k \in N \setminus K} -k \\
 &= \underbrace{\frac{|3|}{v(K)}} + \underbrace{\left(\sum_{k \in N \setminus K} v(k) \right)} + \underbrace{v(N) - v(K)} - \underbrace{\sum_{j \in M \setminus K} v(j)} \\
 &= v(N)
 \end{aligned}$$

[5] Insgesamt : $z \in I(v)$ und K effektiv für z $\square$