

Beispiel 2.4.1

Wir lösen das LGS nach alternativer Methode

 $\Rightarrow A$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & -y_1 - 4 \\ 3 & 5 & 1 & -y_2 + 3 \\ 1 & 1 & 1 & -y_3 \end{array}$$

$$y_1 = -2x_1 - 4x_2 - x_3 - 4$$

$$y_2 = \dots$$

$$y_3 = \dots$$

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 3 & -y_1 - 4 + 4y_3 \\ -2 & 0 & -4 & -y_2 + 3 + 5y_3 \\ 1 & 1 & 1 & -y_3 \end{array}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(Ax = -y + c)$$

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -3 & -y_1 - 4 + 4y_3 \\ 0 & 0 & -1 & -y_2 + 7 + y_3 + y_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}y_1 - 2 + y_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 3y_2 - 25 + y_3 - 4y_1 \\ 0 & 0 & -1 & -y_2 + 7 + y_3 + y_1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}y_2 - \frac{10}{2} + \frac{1}{2}y_3 - y_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2y_1 - \frac{3}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{25}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -y_1 + y_2 - y_3 - 7 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{11}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \left\{ \begin{array}{ccc|c} 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & y_1 \end{array} \right\} + \frac{25}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \left\{ \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & y_2 \end{array} \right\} - 7 \\ 0 & 0 & 1 & \left\{ \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & y_3 \end{array} \right\} - \frac{11}{2} \end{array}$$

$\xrightarrow{(-A)^{-1}}$
 übliches Verfahren ($c=0$)

Beispiel 2.4.2

① Rang auf herkömmliche Art

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & -y_1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & -y_2 \\ 5 & 7 & 4 & 0 & -y_3 \\ 2 & 7 & 7 & 7 & -y_4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & -y_1 \\ -5 & -7 & -4 & 0 & -y_2 + 2y_1 \\ 5 & 7 & 4 & 0 & -y_3 \\ -7 & -7 & -4 & 0 & -y_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 5 & 7 & 4 & 0 & -y_3 & 5 & 7 & 4 & 0 & -y_3 \\ 7 & 2 & 2 & 3 & -y_4 & -5 & -7 & -4 & 0 & -y_4 \\ 5 & -6 & -2 & 5 & -y_5 & -15 & -21 & -12 & 0 & -y_5 + 5y_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & -y_1 \\ -5 & -7 & -4 & 0 & -y_2 + 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_3 - y_2 + 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_4 + 3y_3 + y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_5 + 3y_2 - y_1 \end{array}$$

$\Rightarrow \text{Rang} = 2$

② Dualräume : y_i und $\bar{x}_i$ sind Linearformen $\in (\mathbb{R}^4)^*$ ← statt x_i - Notation

also $y_i, \bar{x}_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ linear (denn $c=0$).

$$\bar{x}_i(x_1, \dots, x_4) := x_i \quad (\text{also Projektion})$$

$$(\mathbb{R}^4)^* \ni y_1 := 4\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2 + 2\bar{x}_3 + \underbrace{1\bar{x}_4}_{\neq 0} \quad (\text{aus Matrix})$$

$y_2, \dots$

$$(\mathbb{R}^4)^* = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4 \rangle \quad (\text{Basis})$$

$$= \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, y_1 \rangle \quad \text{Basisaustausch}$$

$$= \langle y_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, y_1 \rangle$$

weil $\bar{x}_2$ und $\bar{x}_3$ nicht auf-tauchen kein Austausch möglich

$$y_2 := -3\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - 2\bar{x}_4$$

$$y_3 = \underline{2y_1 - y_2}, \quad y_4 = -2y_1 - y_2 + 3y_3 \in \langle \underline{y_1, y_2} \rangle$$

$$y_5 = -y_1 + \underline{3y_2}$$

$$\Rightarrow \dim \{y_1, \dots, y_5\} = 2$$