Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz WS 2012/13

# Proseminar zur Analysis im WS 2012/13

| | |
|---|---|
| Thema des Seminars: | Ausgewählte Themen aus der Analysis |
| Vorkenntnisse: | Analysis I und II |
| Termin: | wöchentlich mittwochs, 10–12 Uhr |

Es stehen diverse Themen zur Auswahl. Bitte schauen Sie sich die Themen in Ruhe an. Mit der Übernahme eines der Themen gilt der Seminarvortrag als begonnen mit allen prüfungsrechtlichen Konsequenzen. Beachten Sie bitte auch, daß jedes Thema nur einmal vergeben werden kann.

1. **Konvergenzkriterien für Reihen: Das Kriterium von Raabe**

   Das Kriterium von Raabe ist eine Verfeinerung des Quotientenkriteriums. Stellen Sie zunächst aus der Vorlesung bekannte Konvergenzkriterien für Reihen zusammen, und formulieren und beweisen Sie so dann das Kriterium von Raabe. Geben Sie Beispiele, die illustrieren, daß es nützlich ist, verschiedene Kriterien zur Verfügung zu haben, und diskutieren Sie ein Beispiel, bei dem das Kriterium von Raabe hilfreich ist.

   Hauptreferenz: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Teubner, 16. Auflage, IV.33.10.

   **Verbindliche Übernahme des Themas:**

2. **Bernoullische Zahlen und Bernoullische Polynome**

   Die Bernoullischen Zahlen treten auf als Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $x/(\mathrm{e}^x - 1)$. Leiten Sie die Potenzreihenentwicklungen des Tangens und Kotangens her und repräsentieren Sie diese mit Hilfe der Bernoullischen Zahlen.

   Führen Sie die Bernoullischen Polynome ein und leiten Sie eine Summenformel für $\sum_{l=1}^{n} l^k$ her, $k \in \mathbb{N}$.

   Hauptreferenz: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Teubner, 16. Auflage, IX.71.

   **Verbindliche Übernahme des Themas:**

### 3. Die Eulersche Summenformel und die Euler-Macheroni-Konstante

Die Eulersche Summenformel erlaubt es, eine endliche Summe der Form $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ durch das Integral $\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$ zu approximieren. Unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an $f$ kann der Fehler der Approximation mit Hilfe der Bernoulli-Polynome beschrieben werden.

Leiten Sie die Eulersche Summenformel her und verwenden Sie diese, um die Euler-Mascheroni-Konstante zu bestimmen.

Hauptreferenz: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Teubner, 16. Auflage, XII.95.

**Verbindliche Übernahme des Themas:**

### 4. Stirlingsche Formel und Wallissches Produkt

Diskutieren Sie das Wallissche Produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots$$

und leiten Sie mit Hilfe des Wallisschen Produkts und der Eulerschen Summenformel einen Beweis der Stirlingschen Formel für $n!$ her.

Hauptreferenz: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 1, Teubner, 16. Auflage, XII.94 und 96.

**Verbindliche Übernahme des Themas:**

### 5. Eine stetige Funktion, die nirgends differenzierbar ist

Konstruieren Sie eine solche Funktion und weisen Sie die verlangten Eigenschaften der Stetigkeit und Nichtdifferenzierbarkeit nach. Berechnen Sie auch das Integral der konstruierten Funktion.

Hauptreferenz: Frank E. Burk, A Garden of Integrals, The Mathematical Association of America, 2.8.

**Verbindliche Übernahme des Themas:**

### 6. Das Riemann-Stieltjes-Integral: Definition, Existenz und Eigenschaften

Das Reimann-Stieltjes-Integral verallgemeinert das Riemann-Integral. Geben Sie die Definition und zeigen Sie die Existenz des Integrals unter geeigneten Voraussetzungen.

Hauptreferenz:
Frank E. Burk, A Garden of Integrals, The Mathematical Association of America, 4.1–4.4.

**Verbindliche Übernahme des Themas:**

7. **Rektifizierbare Wege**

   Bestimmen Sie, welchen "Wegen" sinnvoll eine Länge zugeordnet werden kann und definieren Sie diese. Welche Eigenschaften haben Länge und Weglängenfunktion?

   Hauptreferenz: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Teubner, 13. Auflage, XXI.177.

   **Verbindliche Übernahme des Themas:**

8. **Die Bogenlänge eines Jordanwegs**

   Führen Sie den Begriff des Jordanwegs ein und definieren Sie die Bogenlänge. Problematisieren Sie dabei den Unterschied zwischen Weglänge und Bogenlänge.

   Hauptreferenz: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Teubner, 13. Auflage, XXI.178.

   **Verbindliche Übernahme des Themas:**

9. **Das Wegintegral**

   Führen Sie das Wegintegral ein und beweisen Sie dessen Eigenschaften. Geben Sie Beispiele.

   Hauptreferenz: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Teubner, 13. Auflage, XXI.180.

   **Verbindliche Übernahme des Themas:**

10. **Stetigkeit und Differenzierbarkeit konvexer Funktionen**

    Diskutieren Sie die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften konvexer Funktionen. Betrachten Sie auch die Charakterisierung affin linearer Funktionen und das Verhalten konvexer Funktionen am Rand des Definitionsbereichs.

    Hauptreferenz:
    A. Wayne Roberts and Dale E. Varberg, Convex Functions, Academic Press, 1973, I.11.

    **Verbindliche Übernahme des Themas:**

11. **Charakterisierung konvexer Funktionen, Extrema**

    Geben Sie Kriterien für die Konvexität einer Funktion. Zeigen Sie, daß eine konvexe Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall das Maximum am Rand des Intervalls annimmt, und daß das lokale Minimum einer konvexen Funktion stets auch ein globales Minimum ist. Diskutieren Sie weitere Eigenschaften der Extrema konvexer Funktionen.

    Hauptreferenz:
    A. Wayne Roberts and Dale E. Varberg, Convex Functions, Academic Press, 1973, I.12.

    **Verbindliche Übernahme des Themas:**

**12. Die Legendre-Transformierte einer konvexen Funktion**

Die Legendre-Transformierte einer konvexen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f^\star(y) = \sup_{x \in I}[xy - f(x)]$$

Zeigen Sie, daß $f^\star$ eine konvexe Funktion mit abgeschlossenen Niveaumengen ist. Beweisen Sie wichtigsten Eigenschaften von $f^\star$.

Hauptreferenz: A. Wayne Roberts and Dale E. Varberg, Convex Functions, Academic Press, 1973, I.15.

**Verbindliche Übernahme des Themas:**

**13. Partialbruchzerlegung des Kotangens**

Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ die folgende Partialbruchzerlegung:

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x-n} \right)$$

Hauptreferenz: Martin Aigner und Günter M. Ziegler, Das Buch der Beweise, Springer, 2. Auflage, Kapitel 20.

**Verbindliche Übernahme des Themas:**

**14. Der Satz von Stone-Weierstraß**

Zeigen Sie, daß jede stetige reellwertige Funktion auf einem kompakten Intervall beliebig genau durch ein Polynom approximiert werden kann.

Hauptreferenz: Harro Heuser, Lehrbuch der Analysis, Teil 2, Teubner, 13. Auflage, XIV.115.

**Verbindliche Übernahme des Themas:**