Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe

SS 2013

1. Übung zu Operations Research

15. April 2013

Aufgabe

Bei der Produktion eines Automobils wird ein Fahrgestell entweder mit einer einfachen Karosserie (Typ E) oder einer komfortableren Karosserie (Typ L) versehen. Für die Produktion eines Fahrgestells sind 3 Personentage erforderlich, für eine Karosserie vom Typ E 2 Personentage bei einem Gewinn von 200€, für eine Karosserie vom Typ L 5 Personentage bei einem Gewinn von 300€. In der Fahrgestellproduktion arbeiten 135 Personen, in der Karosserieabteilung 180 Personen. Außerdem ist bekannt, dass sich mehr als 20 Autos mit Karosserie vom Typ L nicht absetzten lassen. Es soll der Gewinn maximiert werden.

a) Formulieren Sie das entsprechende lineare Optimierungsproblem.

Gegeben:

x_1 Anzahl Auto mit Karosserie Typ E
x_2 Anzahl Auto mit Karosserie Typ L
mit $x_1, x_2 \geq 0$

$$\left.\begin{array}{lr} \text{Produktion der Fahrgestelle} & 3x_1 + 3x_2 \leq 135 \\ \text{Produktion der Karosserien} & 2x_1 + 5x_2 \leq 180 \\ \text{Absatzbeschränkung} & x_2 \leq \ \ 20 \end{array}\right\} := P \text{ ist der } \textit{zulässige Bereich}$$

Gewinn $\quad 200x_1 + 300x_2 \quad := f(x_1, x_2)$ entspricht der *Zielfunktion*

Gesucht:

$$\max\{f(x_1,x_2)\colon (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \cap P\},$$

wobei

$$P = \{x \in \mathbb{R}^2_+ \colon \mathbb{A}x \leq c\} \quad \text{mit} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 135 \\ 180 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

b) Existiert ein Maximum? Wenn ja, wo wird es angenommen?

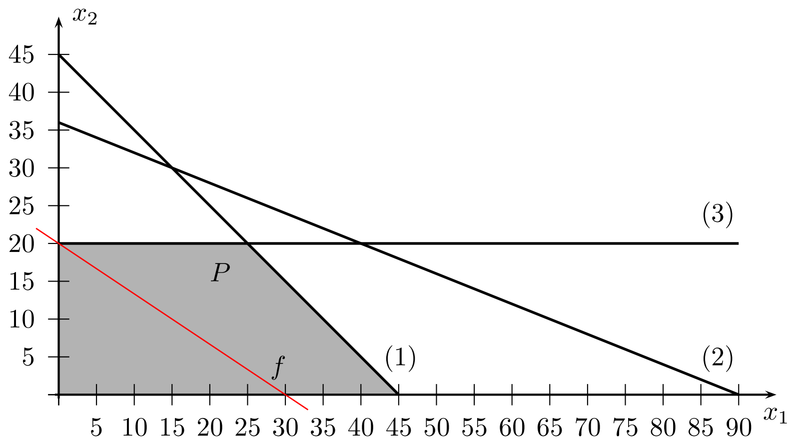
Da $(0,0) \in P$, $0 \leq x_1 \leq 45$, $0 \leq x_2 \leq 20$ und P von abgeschlossenen Mengen der Form $\{\sum_i a_{ij}x_i \leq c_j\}$ erzeugt wird, ist der zulässige Bereich P nichtleer, beschränkt und abgeschlossen, d. h. P ist kompakt. Weiter ist f reellwertig und stetig, so dass mit dem *Satz von Weierstraß* die Existenz eines Maximums folgt.

Das Maximum wird auf dem Rand von P angenommen. Denn

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,x_2) = 200 \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1,x_2) = 300 \neq 0 \quad \forall (x_1,x_2) \in \text{Inneres}(P).$$

Bei einem Maximum von f im Inneren von P müssen aber alle partiellen Ableitungen 0 sein!

c) Lösen Sie die Aufgabe grafisch.
Skizze:



mit

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad x_2(x_1) = 45 - \phantom{\frac{2}{5}} x_1 \\
&(2) \quad x_2(x_1) = 36 - \frac{2}{5}x_1 \\
&(3) \quad x_2(x_1) = 20.
\end{aligned}
$$

Nach b) sind mögliche Extrema $(0,0),(0,20),(25,20),(45,0)$. Das Maximum $x^\star$ liegt im Schnittpunkt der Geraden (1) und (3), da $f(0,0) < f(0,20) < f(45,0) < f(25,20)$, d. h.

$$(x_1^\star, x_2^\star) = (25, 20).$$

Für die optimle Lösung $x^\star$ erhalten wir einen optimalen Wert von

$$f(x_1^\star, x_2^\star) = 200 * 25 + 300 * 20 = 11.000.$$

Antwortsatz: Die optimale Produktion wird ereicht bei 25 Karosserien vom Typ E und 20 Karosserien vom Typ L bei einem Gewinn von 11.000€.