Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe

3. Aufgabenblatt zu Operations Research

Abgabe 03. Mai 2013, bis spätestens 12:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128: Frau Ott (PF 170), Herr Raisich (PF 194), Frau Kämpfe (PF 84)

Aufgabe 3.1 (4 Punkte)
Für eine Matrix $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ seien die folgenden Polyeder gegeben:

$$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \mathbb{A}x \le c\} \quad \text{und} \quad P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \mathbb{A}x = b, x \ge 0\}.$$

a) Wieviele Seiten kann das Polyeder P_1 höchstens besitzen? Geben Sie eine scharfe obere Schranke an.

b) Beweisen Sie, dass das Polyeder P_2 höchstens endlich viele Seiten hat.

Hinweis: Welche Voraussetzungen müssen Sie gegebenenfalls an den Rang der Matrix $\mathbb{A}$ stellen?

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)
Gegeben seien die Mengen $M, N \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann heißt $M + N := \{m + n \colon m \in M, n \in N\}$ Minkowski-Summe von M und N.

a) Skizzieren Sie $M + N$ für $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_2 \le 1\}$ und $N = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|_\infty \le 1\}$.

b) Zeigen Sie, dass für konvexe M, N auch $M + N$ ist konvex.

Aufgabe 3.3 (4 Punkte)
Gegeben seien die Mengen $Q, C \subseteq \mathbb{R}^2$ als Lösungsmenge der linearen Ungleichungssysteme

$$Q := \{x_1 + x_2 \le 2,\ x_1, x_2 \ge 0\} \quad \text{und} \quad C := \{x_1 - 2x_2 \le 0,\ -2x_1 + x_2 \le 0\}$$

und der Punkt $\mathring{x} = \binom{3}{1}$.

a) Zeigen Sie: $Q = k\Big(\Big\{\binom{2}{0}, \binom{0}{0}, \binom{0}{2}\Big\}\Big)$.

b) Geben Sie für den Punkt $\mathring{x}$ eine Darstellung $\mathring{x} = \mathring{q} + \mathring{c}$ mit $\mathring{q} \in Q, \mathring{c} \in C$ an.

c) Beschreiben Sie das Polyeder $P := Q + C$ als Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems.

Aufgabe 3.4 (4 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge und $P = k(V)$ die konvexe Hülle von V. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt

$$\frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} v$$

ein innerer Punkt von P ist.