Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe

SS 2013

7. Aufgabenblatt zu Operations Research

Abgabe 31. Mai 2013, bis spätestens 12:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128: Frau Ott (PF 170), Herr Raisich (PF 194), Frau Kämpfe (PF 84)

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)
Für eine beliebige Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sei

$$S^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, s\rangle \leq 0 \ \forall s \in S\}$$

der *polare Kegel* von S.

a) Beweisen Sie, dass für $S, S_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$ gilt:
   i) $S_i \subseteq S_j \ \Rightarrow \ S_j^\circ \subseteq S_i^\circ$
   ii) $S \subseteq S^{\circ\circ}$
   iii) $\left(\bigcup_{i=1}^k S_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^k S_i^\circ$
   iv) $S^\circ = K(S^\circ) = (K(S))^\circ$

b) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $S^\circ = S^{\circ\circ}$ bzw. $S = S^\circ$?

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)
Es seien

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \phantom{x_1 + {}} x_2 - 4x_3 \\ f_2(x) &= x_1 + 2x_2 - x_3 \\ f_3(x) &= x_1 + x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Linearformen in $\mathbb{R}^3$ und $P = \bigcap_{i=1}^3 \{f_i \geq 0\}$. Finden Sie eine endliche Menge $A \subset \mathbb{R}^3$ mit $P = K(A)$.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)
Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Teilmengen. Zeige:

$$k(A) + k(B) = k(A + B)$$
$$K(A) + K(B) = K(A + B).$$

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)
Es seien $v_1, \ldots, v_l$ und $w_1, \ldots, w_m$ endlich viele Vektoren in $\mathbb{R}^n$ und

$$P = k(\{v_1, \ldots, v_l\}) + K(\{w_1, \ldots, w_m\}).$$

Zeigen Sie, dass P ein Polyeder ist.

Hinweis: Man betrachte den konvexen Kegel, der von den Punkten $(v_1, 1), \ldots, (v_l, 1)$ *und* $(w_1, 0), \ldots, (w_m, 0)$ *erzeugt wird.*