9. Aufgabenblatt zu Operations Research

Altes Studienmodell

Abgabe 14. Juni 2013, bis spätestens 12:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128: Frau Ott (PF 170), Herr Raisich (PF 194), Frau Kämpfe (PF 84)

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

Es seien $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$, $U := \operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$ der von den Vektoren $a_1, \dots, a_n$ aufgespannte Unterraum und $U^\perp$ das orthogonale Komplement in $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass genau eine der beiden folgenden Aussagen gilt:

a) $b \in U$.

b) Es gibt ein $y \in U^\perp$ mit $\langle y, b \rangle \neq 0$.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

In der Situation von Aufgabe 9.1 sei $S = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \colon \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+\}$ der von den Vektoren $a_1, \dots, a_n$ aufgespannte Kegel und $S^\star$ der duale Kegel im $\mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass genau eine der beiden Aussagen gilt:

a) $b \in S$.

b) Es gibt ein $y \in S^\star$ mit $\langle y, b \rangle < 0$.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Untersuchen Sie mit der Hilfe eines der Sätze von Minkowski-Farkas die Lösbarkeit von $\mathbb{A}x = b,\ x \geq 0$ für

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)
Gegeben sei das primale Problem

$$\text{Maximiere } \langle b, x\rangle \text{ unter den Nebenbedingungen } x \geq 0 \text{ und } \mathbb{A}x \leq c$$

für eine Matrix $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und Vektoren $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^m$. Weiter sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ ein zulässiger Punkt des primalen Problems und $y^\star$ ein zulässiger Punkt des dualen Problems. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) $x^\star$ ist Lösung des primalen Problems und $y^\star$ ist Lösung des dualen Problems.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} x_j^\star \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^\star - b_j\right) &= 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq n \quad \text{und} \\ y_i^\star \left(c_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^\star\right) &= 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$