

10. Aufgabenblatt zu Operations Research

Altes Studienmodell

Abgabe 21. Juni 2013, bis spätestens 12:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128: Frau Ott (PF 170), Herr Raisich (PF 194), Frau Kämpfe (PF 84)

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Ein Ölkonzern produziert in Raffinerien R_1 , R_2 und R_3 jeweils drei Sorten Kraftstoff D , N und S . Jede Raffinerie produziert pro Betriebsstunde die in der folgenden Tabelle aufgeführten Kraftstoffmengen (in 1.000 Liter) zu denen in der untersten Zeile aufgeführten Betriebskosten (in 1.000 €):

	R_1	R_2	R_3
D	3	6	6
N	4	6	3
S	2	8	4
	160	400	300

Durch bestehende Lieferverträge mit Tankstellenbetrieben liegt der wöchentliche Mindestumsatz bei 36.000 Liter D , 20.000 Liter N und 30.000 Liter S .

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Dualitätssatz die wöchentliche Auslastung $x = (x_{R_1}, x_{R_2}, x_{R_3})$ der Raffinerien (in Stunden), welche die Gesamtbetriebskosten minimiert.
- Für welchen Kraftstoff hat eine geringe Änderung des Mindestabsatzes den größten Einfluss auf die Gesamtbetriebskosten?

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Entscheiden Sie mit Hilfe des Dualitätssatzes, ob das folgende Problem eine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 40x_1 + 20x_2 + x_3 \quad \text{unter den Nebenbedingungen} \\
 & x_1 - 10x_2 + x_3 \leq 25 \\
 & 3x_1 - 6x_2 \leq 7 \\
 & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
 & 2x_1 - 3x_2 \leq 11 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)

Eine Elektronikfirma stellt elektronische Bauelemente für Radios, Fernseher und Stereoanlagen her. Im nächsten Monat stehen ihr maximal 1.500 Einheiten an Material und 920 Arbeitsstunden zur Verfügung. Der Materialverbrauch und die Arbeitsstunden, die bei der Herstellung anfallen, sowie der Verkaufserlös, bestimmen sich gemäß folgender Tabelle:

	Materialverbrauch	Arbeitsstunden	Verkaufserlös
Radio	2	1	8
Fernseher	12	8	60
Stereoanlage	15	6	45

- a) Bestimmen Sie einen Produktionsplan für den nächsten Monat mit maximalem Gesamterlös.
- b) Angenommen, der Inhaber der Elektronikfirma möchte den aktuellen Gesamtwert seines Unternehmens ermitteln und bestimmt dazu Preise y_M und y_A für das Material pro Einheit und die Arbeitsstunden. Er geht dabei wie folgt vor: Die Produktion eines Bauteils für ein Radio kostet $2y_M + 1y_A$ und erlöst 8€. Also sollten y_M und y_A so bestimmt werden, dass $2y_M + 1y_A \geq 8$ gilt. Für Fernseher und Stereoanlage geht er genauso vor. Wie hoch ist dann mindestens der mit Hilfe der Preise y_M und y_A ermittelte Gesamtwert des Unternehmens und für welche Preise wird der minimale Gesamtgewinn angenommen?
- c) Was hat einen größeren Einfluss auf den Gesamterlös: Eine geringe Änderung des Materialvorrates oder eine geringe Änderung der Arbeitsstunden?

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)

Beweisen Sie denn Transpositionssatz von MOTZKIN:

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt: $Ax < b$, $Bx \leq c$ ist lösbar genau dann, wenn für alle $y \geq 0$ und alle $z \geq 0$ folgende zwei Aussagen zusammen gelten:

(i) $y^T A + z^T B = 0 \Rightarrow y^T b + z^T c \geq 0$ und

(ii) $y^T A + z^T B = 0$, $A \neq 0$, $y \neq 0 \Rightarrow y^T b + z^T c \geq 0$.