Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
SS 2013

10. Aufgabenblatt zu Operations Research

Neues Studienmodell

Abgabe 21. Juni 2013, bis spätestens 12:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128: Frau Ott (PF 170), Herr Raisich (PF 194), Frau Kämpfe (PF 84)

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die *konische Hülle* $c(A)$ definiert als

$$c(A) := \bigcap_{\substack{A \subseteq \mathcal{K} \\ \mathcal{K} \text{ konvexer Kegel}}} \mathcal{K}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Die Menge $c(A)$ ist ein konvexer Kegel.

b) Es gilt $c(A) = K(A)$.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Zwei Zulieferer Z_1 und Z_2 können täglich 35 Tonnen bzw. 55 Tonnen eines Gutes liefern. Die drei finalen Produzenten benötigen davon täglich 30 Tonnen, 40 Tonnen bzw. 20 Tonnen. Bei einem Transport von Z_i $(i = 1, 2)$ nach F_j $(j = 1, 2, 3)$ werden dabei folgende mengenproportionale Kosten pro Tonne kalkuliert:

	F_1	F_2	F_3
Z_1	25	17	18
Z_2	25	18	14

a) Formulieren Sie ein zugehöriges Optimierungsproblem.

b) Wie ändert sich die Aufgabenstellung, wenn zusätzlich Fixkosten $f_{ij} > 0$ (für ein Transport von Z_i nach F_j) berücksichtigt werden sollen?

c) Wie könnte man den Umstand, dass die Strecke zwischen Z_2 und F_3 wegen Bauarbeiten gesperrt ist, im Optimierungsmodell berücksichtigen?

Aufgabe 10.3 (4 Punkte)
Lösen Sie das folgende Optimierungsproblem mit Hilfe des Simplex-Algorithmus.

$$\begin{array}{rl} \max\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 & \text{unter den Nebenbedingungen} \\ x_1 \qquad\qquad\quad + x_4 \leq -3 & \\ -2x_2 \qquad + x_4 \leq 6 & \\ x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 \leq 7 & \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 16. & \end{array}$$

(Bei Nichteindeutigkeit der Zeilen- oder Spaltenauswahl entscheiden Sie sich für das oberste bzw. am weitesten links liegende Element.)

Aufgabe 10.4 (4 Punkte)
Gegeben ist das folgende System

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\leq 7 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq 11 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

a) Geben Sie ein äquivalentes System der Form $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon \mathbb{A}x \leq b\right\}$ an.

b) Sei $P := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon \mathbb{A}x \leq b\right\}$ das Polyeder mit $\mathbb{A}$ und b aus a). Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen Seiten von P sind:

$$M_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}, \qquad M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \colon x = \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ t \geq 0\right\}$$

$$M_3 = \{x \in P : x_1 = 0\}, \qquad M_4 = \{x \in P \colon x_1 - x_2 + x_3 = 7, x_2 = 0\}$$

Welches Teilsystem von $\mathbb{A}x \leq b$ beschreibt die jeweilige Seite?