Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe SS 2013

11. Aufgabenblatt zu Operations Research

Neues Studienmodell

Abgabe 28. Juni 2013, bis spätestens 12:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128: Frau Ott (PF 170), Herr Raisich (PF 194), Frau Kämpfe (PF 84)

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)
Sei $P = \bigcap_{i=1}^{m}\{f_i \leq c_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein nichtleeres Polyeder. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *freie Richtung* von P, falls ein $x \in P$ existiert mit $x + \lambda v \in P$ für alle $\lambda \geq 0$. Es bezeichne P_f die Menge aller freien Richtungen von P. Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Falls v eine freie Richtung von P ist, gilt $x + \lambda v \in P$ für alle $x \in P$ und für alle $\lambda \geq 0$.

b) $P_f = \{v \in \mathbb{R}^n \colon f_i(v) \leq 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\}$.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

a) Geben Sie ein Beispiel für eine konvexe, kompakte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^3$ an, so dass die Menge der Extremalpunkte A_e nicht abgeschlossen ist.

b) Beweisen Sie, dass für jede abgeschlossene, konvexe Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ die Menge A_e ihrer Extremalpukte abgeschlossen ist.

Hinweis: Indirekter Schluss mit dem Folgenkriterium.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus zur Gaußelimination den Rang der folgenden Matrix $\mathbb{A}_\lambda$ in Abhängigkeit des Parameters λ:

$$\mathbb{A}_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -7 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & \lambda \\ 4 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)

a) Skizzieren Sie die konvexe Hülle $k(M)$ für $M := \{(1,1), (1,5), (2,4), (3,3), (5,5)\} \subset \mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie eine Matrix $\mathbb{A}$ und einen Vektor c, so dass $k(M) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \mathbb{A}x \leq c\}$.