Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe SS 2013

9. Präsenzaufgabenblatt zu Operations Research

Bearbeitung am 10./11. Juni 2013

Aufgabe 9.1

Sei $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ ein konvexer Kegel. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\mathcal{K}$ ist ein konvexer Kegel genau dann, wenn jede Linearkombination $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in \mathcal{K}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ in $\mathcal{K}$ liegt.

b) Sei $S \subseteq \mathcal{K}$ eine Seite von $\mathcal{K}$. Dann ist S ein konvexer Kegel.

c) Falls $x \in \mathcal{K}$ ein Extremalpunkt von $\mathcal{K}$ ist, so gilt $x = 0$.

Geben Sie ein nichttriviales Beispiel für einen konvexen Kegel $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3$ an, der kein Polyeder ist.

Aufgabe 9.2

Die Menge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ sei gegeben als Lösungsmenge des Systems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

a) Beweisen Sie, dass P unbeschränkt ist.

b) Untersuchen Sie grafisch, für welche Vektoren $c \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $f(x) = \langle c, x \rangle$ kein Minimum auf P besitzt bzw. für welche c keine eindeutige Minimalstelle auf P existiert.

Aufgabe 9.3*

Seien $a_1, \ldots, a_k, b \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass genau einer der folgenden beiden Fälle eintritt:

a) $b \in K(\{a_1, \ldots, a_k\})$.

b) Es gibt eine Hyperebene H mit $0 \in H$, die $\{a_1, \ldots, a_k\}$ und $\{b\}$ trennt.

Veranschaulichen Sie die beiden Alternativen im $\mathbb{R}^2$ durch eine Zeichnung.