13. Präsenzaufgabenblatt zu Operations Research

Bearbeitung am 08./09. Juli 2013

Aufgabe 13.1

Es bezeichne $\precsim$ die lexikografische Ordnung im $\mathbb{R}^n$, d. h. es gilt $x \precsim y$, falls es ein $k \leq n$ gibt mit $x_i = y_i$ für alle $i < k$ und $x_k \leq y_k$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \precsim x\}$$

ein konvexer Kegel ist. Veranschaulichen Sie diesen Kegel im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ grafisch. Ist dieser Kegel abgeschlossen und/oder spitz?

Aufgabe 13.2

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \min\ & \frac{1}{5}x_1 + x_2 \qquad \text{unter den Nebenbedingungen} \\ & 2x_1 + x_2 \geq 0 \\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 - x_2 \leq 6. \end{aligned}$$

Aufgabe 13.3*

Gegeben sei ein Netzwerk $N = \big((X,\Gamma), s, t, c\big)$. Es bezeichne $c(A)$ die Kapazität des Schnittes $A \subseteq X$. Sei $l \colon \Gamma \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion mit $l(t,s) = 0$ und $l(\gamma) \leq c(\gamma)$ sonst. Weiter bezeichne nun $l(A)$ die Kapazität des Schnittes $A \subseteq X$ bezüglich der l zugeordneten Kapazitätsfunktion $\tilde{l}$, d. h. $\tilde{l}(t,s) = \infty$ und $\tilde{l}(\gamma) = l(\gamma)$ sonst. Für die Zulässigeit eines Flusses fordern wir zusätzlich zu den üblichen Regeln noch $f(\gamma) \geq l(\gamma)$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Nehmen Sie weiter an, dass es einen zulässigen Fluss im Netzwerk gibt und beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Der Wert eines maximalen zulässigen Flusses ist gleich dem minimalen Wert der Differenz $c(A) - l(A)$, wobei das Minimum über alle Schnitte $A \subseteq X$ gebildet wird.

b) Der Wert eines minimalen zulässigen Flusses ist gleich dem maximalen Wert der Differenz $c(A) - l(A)$, wobei das Maximum über alle Schnitte $A \subseteq X$ gebildet wird.