Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz SS 2012

Vertiefung NWI: Vorlesung zur zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Ausgabe: Mittwoch, 4.7.2012
Besprechung: Mittwoch, 4.7.2012 und Mittwoch, 11.7.2012

Probeklausur

Bitte bedenken Sie, daß auch andere Aufgabentypen in der Klausur auftreten können. Die folgende Probeklausur stellt Aufgabentypen aus den vergangenen Jahren exemplarisch zur Verfügung. Die Aufgaben 1–4 entsprechen in etwa dem zu erwartenden Umfang der Prüfungsklausur.

1. Aufgabentyp: *Bedingte Wahrscheinlichkeiten*

Gemäß Statistik infiziert sich eine von 10.000 Personen mit einem gewissen Virus. Das Resultat des medizinischen Tests ist bei 99% der Infizierten positiv.

(a) Wie groß darf die Wahrscheinlichkeit eines fälschlicherweise positiven Tests höchstens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, daß bei positivem Testergebnis tatsächlich eine Infektion vorliegt, mindestens 80% beträgt?

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit eines fälschlicherweise positiven Tests ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Test positiv ausfällt, obwohl die getestete Person nicht infiziert ist.

(b) Wie groß ist – unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus (a) – die Wahrscheinlichkeit, daß bei negativem Testergebnis tatsächlich keine Infektion vorliegt?

Hinweis: Sollten Sie (a) nicht gelöst haben, so rechnen Sie weiter mit der Annahme, daß die dort gesuchte Wahrscheinlichkeit $1/50.000$ beträgt.

2. Aufgabentyp: *Grenzwertsätze*

Das Hotel Morgenbreede Plaza hat 87 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Manager maximal akzeptieren, wenn eine Reservierung erfahrungsgemäß mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ annulliert wird und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens $0,04$ sein soll?

Verwenden Sie eine geeignete Approximation. Welche Annahmen machen Sie und sind diese gerechtfertigt?

3. Aufgabentyp: *Dichten und Unabhängigkeit*

Es seien zwei reellwertige Zufallsgrößen X, Y gegeben, deren gemeinsame Verteilung eine Dichte der Form

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,\mathrm{e}^{-(x+y)} & \text{für } 0 \le x \le y < \infty, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

habe.

(a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ derart, daß f eine Dichte auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Randdichten $x \mapsto f_X(x)$ von X und $y \mapsto f_Y(y)$ von Y.

(c) Sind die Zufallsgrößen X und Y unabhängig?

(d) Bestimmen Sie $P(X < 2Y)$.

Hinweis: Sollten Sie (a) nicht gelöst haben, so können Sie in den folgenden Aufgabenteilen mit dem unbekannten Parameter c rechnen.

4. Aufgabentyp: *Kombinatorik, Erwartungswert und Varianz, Unabhängigkeit*

(a) Die Ereignisse A, B, C seien unabhängig. Desweiteren seien die Zufallsvariablen X und Y unabhängig.
Stimmen die folgenden Aussagen im allgemeinen? Antworten Sie ohne Begründung mit *ja* bzw. *nein*.

(i) A^{c} und B sind unabhängig.

(ii) $A \cap B$ und $B \cup C$ sind unabhängig.

(iii) $P(A^{\mathsf{c}} \cup B) = P(A^{\mathsf{c}}) + P(B)$

(iv) $P(A \cap (B \cup C) = P(A)[P(B) + P(C) - P(B)P(C)]$

(v) $\mathbb{E}(X^2 Y) = \mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}Y$

(vi) $\mathbb{E}((XY)^2) = (\mathbb{E}(XY))^2$

(vii) $\operatorname{Var}(XY) = \operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)$

(viii) $\operatorname{Var}(XY) = \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)$

Bewertung dieses Aufgabenteils:
$+0.5$ Punkte für jede richtige Antwort.
Maximal 4 Punkte, minimal 0 Punkte.

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an für genau drei Richtige im Lotto 6 aus 49 (ohne Beweis).

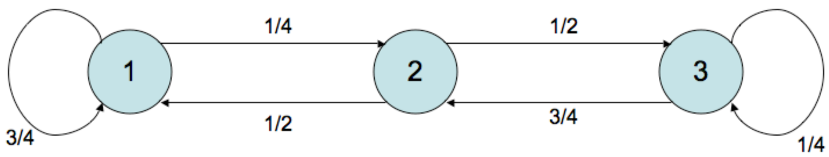
(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier unterscheidbare Kugeln mit den Nummern 1,...,4 auf 2 Urnen zu verteilen (ohne Beweis)?

(d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 rote und 3 blaue Kugeln auf 2 Urnen zu verteilen (ohne Beweis)?

(e) Wir ziehen zweimal mit Zurücklegen aus einer Urne mit drei Kugeln, die mit den Nummern 1,2,3 gekennzeichnet sind. Wir addieren die beiden Nummern. Welche Summen können wir auf diese Art erhalten, und was ist deren Wahrscheinlichkeit (ohne Beweis)?

5. Aufgabentyp: *Markoffketten*

Eine Markovkette $(X_n)_n$ sei gegeben durch den Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$, die Startverteilung $\nu(1) = 1$, $\nu(2) = \nu(3) = 0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten gemäß folgender Skizze:



(a) Bestimmen Sie die zugehörige stochastische Matrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$.

(b) Berechnen Sie die Verteilung von X_1.

(c) Berechnen Sie $P(X_1 = 1, X_2 = 2)$.

(d) Existiert eine stationäre Verteilung π der Markov-Kette? Berechnen Sie diese, falls sie existiert. Ist π eindeutig?