

11. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis **Donnerstag, 21.6.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128:

Frau Ott (Fach 196), Herr Raisich (Fach 194), Frau Kämpfe (Fach 84)

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

(a) Sei
$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (i) Zeigen Sie, dass f eine Dichte ist, und bestimmen Sie für die zugehörige Zufallsgröße X die Verteilungsfunktion.
 - (ii) Zeichnen Sie Dichte und Verteilungsfunktion.
 - (iii) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X .
- (b) Die Zufallsgröße Y sei durch folgende Verteilungsfunktion definiert:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < 0, \\ 2y^2 & \text{für } 0 \leq y \leq 1/2, \\ -2y^2 + 4y - 1 & \text{für } 1/2 < y \leq 1, \\ 1 & \text{für } y > 1. \end{cases}$$

- (i) Bestimmen Sie die Dichte der Zufallsgröße Y .
- (ii) Zeichnen Sie Dichte und Verteilungsfunktion.
- (iii) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von Y .

Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Es sei X eine Zufallsgröße mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \in (0, x_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Berechnen Sie x_0 .
- (b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- (c) Skizzieren Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion.
- (d) Berechnen Sie $\mathbb{P}(1/2 < X < 1)$.
- (e) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X .

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Auf der Metallhobelmaschine der Firma Ruck-Zuck & Co. werden Platten hergestellt, deren Höhe X untersucht wird. Aufgrund der Erfahrungswerte wird angenommen, dass X normalverteilt ist und bei der aktuellen Maschineneinstellung den Erwartungswert $\mu = 20$ mm und die Varianz $\sigma^2 = 0.04$ mm hat. Eine Platte kann als maßgerecht betrachtet werden, wenn ihre Höhe zwischen 19.97 mm und 20.05 mm liegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Platte maßgerecht ist? Würde eine andere Maschineneinstellung (Änderung von μ) möglicherweise zu besseren Ergebnissen führen? Erläutern Sie auch, was eine Änderung von σ , falls technisch möglich, in diesem Problem praktisch bedeuten würde.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)

Die Lebensdauer eines elektronischen Bauteils sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu = 200$ h. Wie groß sind jeweils die Wahrscheinlichkeiten, dass das Bauteil

- (a) die 100. Stunde überlebt,
- (b) zwischen der 100. und der 250. Stunde ausfällt,
- (c) weitere 150 Stunden überlebt, wenn es bis zur 100. Stunde noch nicht ausgefallen ist?

Hinweis zu (c): Berechnen Sie $\mathbb{P}(X > 250 \mid X > 100)$ für die Lebensdauer X des Bauteils.