

12. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis **Donnerstag, 28.6.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128:

Frau Ott (Fach 196), Herr Raisich (Fach 194), Frau Kämpfe (Fach 84)

Aufgabe 12.1 (4 Punkte) Es sei $\lambda \in [-1, 1]$, sowie

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 + \lambda(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) & \text{für } 0 \leq x_1, x_2 \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- Die Funktion ist eine Dichte für eine Zufallsgröße $X = (X_1, X_2)$.
- Die Randdichten sind durch $f_{X_1}(x_1) = f_{X_2}(x_2) = 1$ für alle $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$ gegeben.
- Die Zufallsgrößen X_1 und X_2 sind nicht unabhängig.
- Es gilt $\text{Cov}(X_1, X_2) := \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] - \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] = \lambda/36$.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Es seien X, Y unabhängig und auf $[a, b]$ mit $0 < a < b$ gleichverteilt.

- (a) Berechnen Sie die Verteilung $\mathbb{P}(X^2 \cdot Y \leq t)$ von der Zufallsgröße $X^2 \cdot Y$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Besitzt $X^2 \cdot Y$ eine Dichte?

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Sei D das Dreieck in \mathbb{R}^2 , das durch die Geraden $y = 0$, $y = x$ und $y = 2 - x$ begrenzt wird.

- (a) Skizzieren Sie das Dreieck.
- (b) Für welchen Wert des Parameters c ist die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} cy & \text{für } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

- (c) Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$, wobei (X, Y) eine Zufallsgröße mit Dichte f ist.
- (d) Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)

- (a) Für welchen Wert des Parameters c ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} cx_1(x_1 - x_2) & \text{für } 0 \leq x_1 \leq 2 \text{ und } 0 \leq x_2 \leq x_1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte?

- (b) Berechnen Sie die Randdichten $f_{X_1}(x_1)$ und $f_{X_2}(x_2)$, wobei (X_1, X_2) eine Zufallsgröße mit Dichte f ist.
- (c) Berechnen Sie die Verteilung $\mathbb{P}(Y_1 \leq t, Y_2 \leq s)$ des Zufallsvektors $Y = (Y_1, Y_2)$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$, wobei $Y_1 = X_1$ und $Y_2 = X_1 - X_2$.