

13. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis **Donnerstag, 4.7.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128:

Frau Ott (Fach 196), Herr Raisich (Fach 194), Frau Kämpfe (Fach 84)

Aufgabe 13.1 (4 Punkte) Gegeben sei die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass P eine stochastische Matrix ist.
- (b) Es seien der Zustandsraum $S = \{\text{rot, gelb, grün}\}$ und die Startverteilung ν mit $\nu(\text{rot}) = 0.7$, $\nu(\text{gelb}) = 0.2$ und $\nu(\text{grün}) = 0.1$ gegeben. Betrachten Sie die zu (P, ν) gehörige Markoffkette, und bestimmen Sie die Verteilung von X_2 . Ist ν eine Gleichgewichtsverteilung dieser Markoffkette?

Aufgabe 13.2 (4 Punkte)

Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Bernoulli-verteilte Folge von Zufallsgrößen und $X_n := 2Y_n + Y_{n+1}$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markoffkette ist, und bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten.

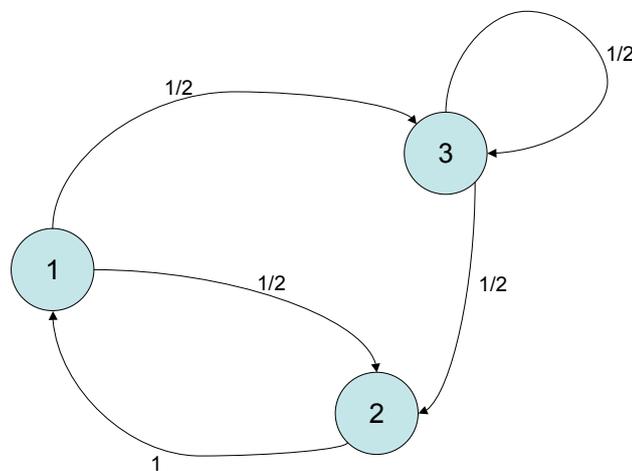
Aufgabe 13.3 (4 Punkte)

Es bezeichne W_n das Wetter am Tag n mit Zuständen R für Regen und S für Sonne. Wir machen folgende Annahmen:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass es heute regnet, falls es die beiden letzten Tage nicht geregnet hat, beträgt 0.3.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass es heute regnet, falls es an mindestens einem Tag der letzten beiden Tage geregnet hat, beträgt 0.6.

- Zeigen Sie: W_n ist *keine* Markoffkette.
- Zeigen Sie: Das Wetter für zwei aufeinander folgende Tage $X_n = (W_{n-1}, W_n)$ definiert eine Markoffkette mit Zustandsraum $\{RR, RS, SR, SS\}$.
- Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten für $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Berechnen Sie die Verteilung von X_2 .
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es am Mittwoch regnet unter der Bedingung, dass es am Sonntag und Montag davor nicht regnete.

Aufgabe 13.4 (4 Punkte) Die Markoffkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gegeben durch den Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$, die Startverteilung $\nu(1) = \nu(2) = 0.5, \nu(3) = 0$ und Übergangswahrscheinlichkeiten gemäß folgender Skizze:



- Bestimmen Sie die zugehörige stochastische Matrix $P = (p_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}}$.
- Bestimmen Sie sowohl die Verteilung von X_2 als auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 = 3, X_2 = 2\}$.
- Gibt es eine Gleichgewichtsverteilung π ? Falls ja, bestimmen Sie diese.