Prof. Dr. Barbara Gentz
Dipl.-Wirtsch.-Math. Diana Kämpfe
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

SS 2012

7. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis **Donnerstag, 24.5.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128:
Frau Ott (Fach 196), Herr Raisich (Fach 194), Frau Kämpfe (Fach 84)

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze Hubert ins Schwarze trifft, sei bei jedem Schuss p für ein p mit $0 < p < 1$. Bei einem Wettbewerb gelte folgende Regelung: So lange der Schütze nicht ins Schwarze getroffen hat, darf er erneut schießen – bis zu viermal. Auch wenn er selbst beim vierten Versuch erfolglos war, muss er nach dem vierten Schuss aufhören. Es sei X die Anzahl der abgegebenen Schüsse. Bestimmen Sie die Verteilung von X, den Erwartungswert und die Varianz von X. Stellen Sie sowohl die Verteilung von X als auch die Verteilung der *standardisierten* Zufallsgröße

$$Y = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]}}$$

für $p = 0.4$ graphisch dar.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Eine Rohrleitung bestehe aus 20 Segmenten. Es wird festgestellt, dass die Ausflußmenge kleiner ist als die Zuflußmenge. Es muss also mindestens ein Leck in der Leitung geben. Wir wollen annehmen, dass es genau ein Leck gibt, und dass dieses mit Wahrscheinlichkeit 1/20 in einem bestimmten Segment liegt. Das defekte Segment soll mit möglichst wenigen Messungen ausfindig gemachen werden. Dazu messen wir die Durchflußmenge an den entsprechenden Segmentgrenzen.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl X von Messungen, wenn wir sukzessive jede Segmentgrenze prüfen. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $S(X) = \sqrt{\operatorname{Var}[X]}$.

(b) Suchen Sie nach einer günstigeren Strategie und bestimmen Sie wieder die Verteilung der Anzahl von Messungen, sowie Erwartungswert und Standardabweichung.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)
Eine Firma produziert n Artikel pro Monat. Die Produktionskosten eines Artikels betragen c € und der Verkaufspreis liegt bei $(1+\gamma)c$ €. Über die Nachfrage ist bekannt, dass mit Wahrscheinlichkeit p_k im Monat $k \geqslant 0$ Exemplare verkauft werden können.

(a) Geben Sie die erwartete Anzahl der nachgefragten Exemplare an.

(b) Geben Sie die erwartete Anzahl verkaufter Artikel an.

(c) Bestimmen Sie den erwarteten Gewinn.

(d) Nehmen Sie an, dass $\gamma = 1$ und $p_k = (5/100)(95/100)^k$ ist. Bestimmen Sie graphisch das optimale n, das heißt die Anzahl an Artikeln, die die Firma produzieren sollte, um den erwarteten Gewinn zu maximieren.

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)
Die gemeinsame Verteilung von X und Y sei gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=-2,\ Y=-3) = \tfrac{1}{12},\\
&\mathbb{P}(X=0,\ Y=-3) = \tfrac{1}{6},\\
&\mathbb{P}(X=1,\ Y=-3) = \tfrac{1}{12},\\
&\mathbb{P}(X=-2,\ Y=0) = \tfrac{1}{12},\\
&\mathbb{P}(X=-1,\ Y=0) = \tfrac{1}{6},\\
&\mathbb{P}(X=0,\ Y=0) = \tfrac{1}{12},\\
&\mathbb{P}(X=-1,\ Y=1) = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Randverteilungen von X und Y.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\operatorname{Var}[X]$, $\operatorname{Var}[Y]$.

(c) Sind X und Y unabhängig?