

9. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis **Freitag, 8.6.2012, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Postfächer im V3-128:

Frau Ott (Fach 196), Herr Raisich (Fach 194), Frau Kämpfe (Fach 84)

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

Die Zufallsgröße X sei für ein $n \in \mathbb{N}$ auf $\{-n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n\}$ gleichverteilt.

- Berechnen Sie $\mathbb{P}(|X| \geq n/2)$ und $\mathbb{P}(|X| \geq 2n/3)$ exakt.
- Verwenden Sie die Markoffsche Ungleichung für $k = 1$, $k = 2$ und $k = 3$, um die Wahrscheinlichkeiten aus (a) abzuschätzen.
- Vergleichen Sie die Resultate aus (a) und (b) in den Fällen $n = 1$, $n = 3$, $n = 10$ und für $n \rightarrow \infty$. Sind die Abschätzungen sinnvoll?

Hinweis: $\sum_{i=1}^n i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ und $\sum_{i=1}^n i^3 = n^2(n+1)^2/4$.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Ein Hotel hat 218 Betten. Wie viele Reservierungen darf der Manager maximal annehmen, wenn eine Reservierung erfahrungsgemäß mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ annulliert wird und die Wahrscheinlichkeit einer Überbuchung höchstens $1/40$ sein soll?

Geben Sie sowohl die exakte Antwort mit Hilfe des Computers als auch die Antwort, die aus der Normalapproximation resultiert.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Warum ist der folgende Lösungsansatz für Aufgabe 9.2 falsch? (Derartige "Lösungen" traten bereits in den letzten Jahren bei den Klausuren auf, bitte sehen Sie sich diese Aufgabe gründlich an.)

$$1 - \Phi\left(\frac{N - 218 \cdot \frac{4}{5}}{\sqrt{218 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}}}\right) \approx \frac{25}{1000}$$

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

Im Casino ist die Wahrscheinlichkeit zu verlieren stets größer als die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. Einfachheitshalber wollen wir annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit eine Runde zu gewinnen $49/100$ ist. Der Einsatz für eine Spielrunde beträgt 1 € . Wenn Sie gewinnen, bekommen Sie das Doppelte des Einsatzes, andernfalls verlieren Sie ihren Einsatz.

- (a) Geben Sie ein stochastisches Modell für dieses Spiel an.
- (b) Die Zufallsgröße S_n beschreibe Ihren Gewinn bzw. Verlust nach n Spielen, $n \geq 1$. Verwenden Sie das *schwache Gesetz der großen Zahlen*, um zu zeigen, dass

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} + \frac{1}{50}\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt, für jede Wahl von $\varepsilon > 0$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis.

- (c) Bestimmen Sie für beliebiges $n > 1$ eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass Sie nach n Spielen einen (positiven) Gewinn erspielt haben. Ist es attraktiv, in diesem Casino zu spielen?