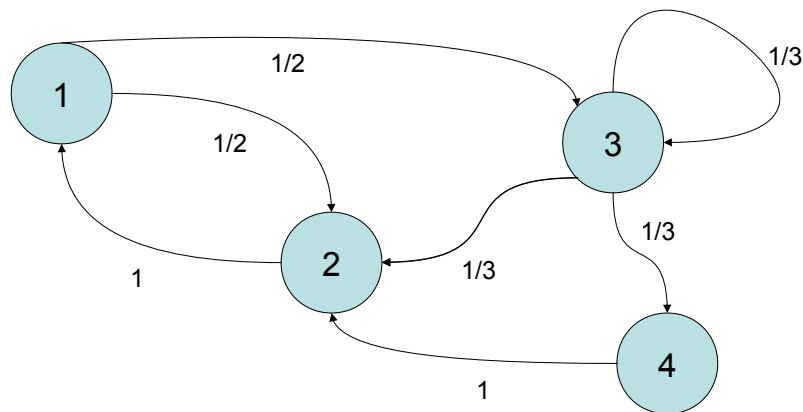


12. Präsenzübung zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Bearbeitung am 27/29.6.2012

Präsenzaufgabe 12.1

Die Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gegeben durch den Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4\}$, die Startverteilung $\nu(1) = \nu(2) = 0.25$, $\nu(3) = 0$, $\nu(4) = 0.5$ und Übergangswahrscheinlichkeiten gemäß folgender Skizze:



- Bestimmen Sie die zugehörige stochastische Matrix $P = (p_{ij})_{i,j \in \{1,2,3,4\}}$.
- Bestimmen Sie sowohl die Verteilung von X_2 als auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{X_1 = 4, X_2 = 2\}$.
- Bestimmen Sie die Gleichgewichtsverteilung π .
- Verifizieren Sie durch direkte Rechnung, dass für die Übergangswahrscheinlichkeiten gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x, y) = \pi(y) \quad \text{für alle } x, y \in S.$$

Präsenzaufgabe 12.2

Eine Urne enthalte $M \geq 2$ Kugeln, die nummeriert sind. Es wird fortlaufend mit Zurücklegen jeweils eine Kugel gezogen. Es sei X_n die Anzahl der verschiedenen Kugeln, die in den ersten n Ziehungen auftreten. Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markovkette? Falls ja, bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten.

Präsenzaufgabe 12.3

Ein Käfer versucht, eine Treppe von vier Stufen zu erklimmen. Dabei erreicht er, auf der i -ten Stufe stehend ($i = 0, 1, 2, 3$, die 0-te Stufe sei der Boden vor der Treppe), mit Wahrscheinlichkeit $p_i \in (0, 1)$ die nächste Stufe, mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_i$ fällt er jedoch die ganze Treppe hinunter. Wenn der Käfer die 4-te Stufe erreicht hat, so verbleibt er dort.

- (a) Veranschaulichen Sie das Problem durch ein geeignetes Diagramm. Liegt eine Markovkette vor? Falls ja, geben Sie die zugehörige stochastische Matrix an, sowie Zustandsraum und Startverteilung.
- (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Käfer nach genau 7 Schritten die Treppe erstmalig erklommen hat, das heißt, erstmalig die vierte Stufe erreicht hat?
- (c) Gibt es eine Gleichgewichtsverteilung? Falls ja, bestimmen Sie eine solche. Ist diese eindeutig bestimmt?