

13. Präsenzübung zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Bearbeitung am **3/5.7.2012**

Präsenzaufgabe 13.1

Es seien zwei reellwertige Zufallsgrößen X, Y gegeben, deren gemeinsame Verteilung eine Dichte der Form

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \text{ und } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

habe.

- (a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ derart, dass f eine Dichte auf \mathbb{R}^2 ist.
- (b) Bestimmen Sie die Randdichten $x \mapsto f_X(x)$ von X und $y \mapsto f_Y(y)$ von Y .
- (c) Sind die Zufallsgrößen X und Y unabhängig?
- (d) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X < Y)$.
- (e) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X < Y/3)$.

Sollten Sie (a) nicht gelöst haben, so können Sie in den folgenden Aufgabenteilen mit dem unbekanntem Parameter c rechnen.

Präsenzaufgabe 13.2

Bei der Muschelzucht gibt erfahrungsgemäß nur jede 50. Muschel eine Perle.

- (a) Betrachten Sie das Zufallsexperiment, das gegeben ist durch das Überprüfen von N Muscheln auf Perlen. Welche Verteilung hat die Anzahl S_N der gefundenen Perlen? Was für Annahmen machen Sie?

- (b) Wie groß ist die erwartete Anzahl von Perlen, wenn 100 Muscheln geöffnet werden? Bestimmen Sie auch die Varianz dieser Zufallsgröße. (Sie dürfen die allgemein gültigen, aus der Vorlesung bekannten Ausdrücke verwenden.)
- (c) Wie groß ist die exakte Wahrscheinlichkeit, unter 100 Muscheln keine Perle zu finden?
- (d) Wie viele Muscheln müssen geöffnet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% mindestens eine Perle zu finden?

Präsenzaufgabe 13.3

- (a) Die Ereignisse A, B, C seien unabhängig. Stimmen die folgenden Aussagen im allgemeinen? (Antworten Sie ohne Begründung mit ja bzw. nein.)
 - (i) $A^c \cup B$ und $B \cup C$ sind unabhängig.
 - (ii) A und $B \cap C$ sind unabhängig.
 - (iii) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$
 - (iv) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(C)$

Bewertung dieses Aufgabenteils:

+0.5 Punkte für jede richtige, -0.5 Punkte für jede falsche Antwort.
Maximal 2 Punkte, minimal 0 Punkte.

- (b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an für genau drei Sechsen beim Werfen von zehn fairen Würfeln (ohne Beweis).
- (c) Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig. Stimmen die folgenden Aussagen im allgemeinen? (Antworten Sie ohne Begründung mit ja bzw. nein.)
 - (i) $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
 - (ii) $\mathbb{E}[X/Y] = \mathbb{E}[X]/\mathbb{E}[Y]$, sofern $Y \neq 0$ mit $\mathbb{E}[Y] > 0$
 - (iii) $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$
 - (iv) $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y)$

Bewertung dieses Aufgabenteils:

+0.5 Punkte für jede richtige, -0.5 Punkte für jede falsche Antwort.
Maximal 2 Punkte, minimal 0 Punkte.

- (d) Geben Sie die Poisson-Verteilung und ihren Erwartungswert an (ohne Beweis).
- (e) Formulieren Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen. Welche Voraussetzungen müssen Sie machen?