Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe

11. Aufgabenblatt zu Operations Research

Abgabe: **Montag, 13. Juli 2015, 10:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe im Raum V3-128: Soliman Keshta PF 126, Diana Kämpfe PF 84. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

Gegeben sei das Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^2$ mit

$$P = \{x_1 + x_2 \geq 2,\ x_1 + 2x_2 \geq 3,\ x_1 - x_2 \leq 5,\ x_1, x_2 \geq 0\}.$$

a) Geben Sie für P ein konvexes Polyeder Q und einen polyedrischen Kegel C an, so dass

   i) ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $x^1, \dots, x^n \in P$ existieren mit $Q = \operatorname{conv}\{x^1, \dots, x^n\}$,

   ii) $P = \{x = q + c : q \in Q,\ c \in C\}$.

   Nutzen Sie dabei die Darstellung der Mengen Q und C als Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume.

b) Verifizieren Sie die Gültigkeit des Satz (3.16) für dieses Beispiel. Überführen Sie dazu C in die Form $\{\tilde{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbb{A}\tilde{x} = 0,\ \tilde{x} \geq 0\}$, bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes (3.10) $\bar{L}$, die Menge aller Kanten von C, und zeigen Sie $C = \operatorname{conv} \bar{L}$.

Aufgabe 11.2 (6 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes (3.10) alle Ecken, Kanten und Kegelerzeugende von

a) $T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$,

b) $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 - 4x_2 \leq 1,\ 2x_1 - 4x_2 \leq 3,\ x_1, x_2 \geq 0\}$.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: $M(P)$ ist konvexe Hülle seiner Kanten.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte)

Gegeben sei das Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$P = \{x_1 \leq 2,\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4,\ 3x_2 + 4x_3 \leq 6,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\hat{x} = (2, 0, 1)^T$ ist eine Ecke von P ist.

b) Bestimmen Sie alle Nachbarecken von $\hat{x}$. Welche dieser Ecken sind entartet?