Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe

12. Aufgabenblatt zu Operations Research

Abgabe: **Montag, 20. Juli 2015, 10:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe im Raum V3-128: Soliman Keshta PF 126, Diana Kämpfe PF 84. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Ein Catering-Unternehmen möchte einen Obstsalat anbieten, welcher den folgenden Anforderungen genügt: 1kg Salat soll mindestens 9g Eiweiß, mindestens 190g Kohlehydrate und höchstens 5g Fett enthalten. Der jeweilige Nährstoffgehalt pro kg Fruchtsorte kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

	Eiweiß	Fett	Kohlehydrate
Bananen	11g	2g	220g
Orangen	10g	2g	120g
Äpfel	3g	6g	150g

Der Kilopreis der Früchte beläuft sich jeweils auf $1{,}20$€ für Bananen, $1{,}10$€ für Orangen und $1{,}25$€ für Äpfel.

a) Kann mit Bananen alleine eine sachgemäße Ernährung erfolgen?

b) Wie muss das Unternehmen den Obstsalat zusammensetzen, damit möglichst geringe Kosten auftreten?

c) Welche Kosten werden je kg Obstsalat gegenüber der bisherigen empirischen Zusammensetzung $x_1 : x_2 : x_3 = 7 : 2 : 1$ eingespart?

d) Welche Zusammensetzung enthält mehr Fett?

e) Wie stark müsste der Preis von Äpfeln sinken, damit ein kostenoptimaler Obstsalat alle drei Fruchtbestandteile enthält?

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ sei gegeben als Lösungsmenge von

$$B = \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ x_1 - x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \right\}.$$

a) Beweisen Sie, dass B unbeschränkt ist.

b) Untersuchen Sie, für welche Vektoren $c \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $f(x) = c^T x$ kein Minimum auf B besitzt bzw. für welche c keine eindeutige Minimalstelle auf B existiert.

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Gegeben sei das folgende nicht-lineare Optimierungsproblem

$$
\begin{aligned}
x_1^3 \cdot x_2 &\to \max \\
x_1^2 + x_2^2 &= 1
\end{aligned}
$$

a) Begründen Sie die Existenz der Maximallösung.

b) Lösen Sie die Aufgabe.

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)

Untersuchen Sie mittels Dualität, für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgende Optimierungsaufgabe eine Lösung besitzt

$$
\begin{aligned}
\lambda x_1 - x_2 - x_3 &\to \max \\
x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3 \\
2x_2 - 2x_3 &\le 8 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie im Falle der Lösbarkeit eine untere und eine obere Schranke für die Zielfunktionswerte.