Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
SS 2015

2. Aufgabenblatt zu Operations Research

Abgabe: **Montag, 27. April 2015, 10:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe im Raum V3-128: Soliman Keshta PF 126, Diana Kämpfe PF 84. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Gegeben sind die folgenden linearen Gleichungssysteme $\mathbb{H} \cdot x = d$ und $\mathbb{H}' \cdot x = d'$, $x \in \mathbb{R}^6$, mit

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & -5 & 5 \end{pmatrix}, \ d = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \mathbb{H}' = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ d' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das entsprechende Tableau $(\mathbb{A}, b)$ aus $\overline{(\mathbb{H}, d)}$ zur Basis $B = (1, 2, 3)$ und das Tableau $(\mathbb{A}', b')$ aus $\overline{(\mathbb{H}', d')}$ zur Basis $B' = (4, 5, 6)$.

b) Berechnen Sie die Basisinverse $\mathbb{A}_{B'}^{-1}$. Zum Lösen dieser Aufgabe darf der Satz (1.8) *nicht* angewendet werden. Führen Sie stattdessen eine explizite Rechnung entlang des Beweises zum Satz (1.8) aus.

c) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Aussagen des Satzes (1.8):

$$\mathbb{A}_{B'}^{-1} \cdot (\mathbb{A}, b) = (\mathbb{A}', b') \quad \text{und} \quad \mathbb{A}_{B'}^{-1} = \mathbb{A}'_{B}.$$

Aufgabe 2.2 (2 Punkte)

Betrachtet wird das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^6.$$

Zeigen Sie, dass jedes zugehörige Tableau zu einer Basis $(\beta(1), \beta(2), \beta(3))$, $\beta(i) \in \{1, \ldots, 6\}$, $i = 1, 2, 3$, eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2.3 (6 Punkte)

a) Geben Sie zwei verschiedene Parameterdarstellungen der Lösungsmannigfaltigkeit des folgenden Gleichungssystems an.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_4 + 2x_5 - \ \ x_6 &= 2 \\ x_2 + 2x_4 - \ \ x_5 - 2x_6 &= 0 \qquad \text{für } (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6 \\ x_3 - \ \ x_4 + \ \ x_5 + 3x_6 &= 4 \end{aligned}$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor: Wählen Sie zwei verschieden Basen $B = (\beta(1), \beta(2), \beta(3))$, $B' = (\beta'(1), \beta'(2), \beta'(3))$, wobei sich beide Basen nur um ein Element unterscheiden. D.h., setzen Sie für ein $i \in \{1, 2, 3\}$ und ein $k \in \mathrm{NBV}$:

$$\beta'(l) = \left\{ \begin{array}{cl} \beta(l), & l \in \{1,2,3\},\ l \neq i \\ k, & l = i \end{array} \right\}.$$

und bestimmen Sie die zugehörigen Tableaus $(\mathbb{A}, b)$ und $(\mathbb{A}', b')$.

b) Weisen Sie nach, dass unter Anwendung der nachstehenden Formeln

$$\begin{cases} a'_{il} = a_{il}/a_{ik}, \quad b'_i = b_i/a_{ik}, & l = 1, \ldots, 6, \\ a'_{jl} = a_{jl} - (a_{jk} \cdot a_{il})/a_{ik}, \quad b'_j = b_j - (a_{jk} \cdot b_i)/a_{ik}, & l = 1, \ldots, 6,\ j = 1, 2, 3, j \neq i, \end{cases}$$

das Tableau $(\mathbb{A}, b) = (a_{ij}, b_j)_{\substack{i=1,\ldots,6 \\ j=1,2,3}}$ ebenfalls in das Tableau $(\mathbb{A}', b') = (a'_{ij}, b'_j)_{\substack{i=1,\ldots,6 \\ j=1,2,3}}$ überführt werden kann.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)
Gegeben sind die folgenden linearen Gleichungssysteme $\mathbb{H} \cdot x = d$ und $\mathbb{H}' \cdot x = d'$, $x \in \mathbb{R}^5$, mit

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{H}' = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ d' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie das entsprechende Tableau $(\mathbb{A}, b)$ aus $\overline{(\mathbb{H}, d)}$ zur Basis $B = (2, 3, 4)$ und das Tableau $(\mathbb{A}', b')$ aus $\overline{(\mathbb{H}', d')}$ zur Basis $B' = (3, 2, 4)$.

b) Berechnen Sie die Basisinverse $\mathbb{A}_{B'}^{-1}$. Man zeige insbesondere, dass die Tableaus durch Multiplikation mit einer Permutationsmatrix ineinander übergehen.