

4. Aufgabenblatt zu Operations Research

Abgabe: Montag, 11. Mai 2015, 10:00 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe im Raum V3-128: Soliman Keshta PF 126, Diana Kämpfe PF 84. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 4.1 (6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden lineare Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 4 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 3y_4 = 2 \\ y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 = 3 \\ y_4 = 1 \end{array}$$

Führen Sie die entsprechenden Austauschschritte zunächst anhand von Normaltableaus und anschließend noch einmal mit Hilfe von verkürzten Tableaus durch.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage. Ist $U \in \text{Mat}(n, n)$ eine nicht-singuläre, obere Dreiecksmatrix, so ist U^{-1} als Produkt von oberen Dreiecksmatrizen $U_i \in \text{Mat}(n, n)$ darstellbar, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$U^{-1} = U_1 \cdot U_2 \cdot \dots \cdot U_m,$$

mit Matrizen U_i der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & u_{1\bullet}^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & u_{k-1\bullet}^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_{k\bullet}^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & u_{k+1\bullet}^{(i)} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{n\bullet}^{(i)} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_{k+1\bullet}^{(i)} = \dots = u_{n\bullet}^{(i)} = 0.$$

Aufgabe 4.3 (Innerbetriebliche Leistungsverrechnung) (6 Punkte)

Betrachtet wird ein Betrieb mit drei Abteilungen (Kostenstellen) A_1 , A_2 und A_3 . Jede Abteilung gibt an die beiden übrigen Abteilungen sowie an eine gemeinsame Vertriebsstelle Leistungen in Leistungseinheiten (LE) ab. Zu den primären Kosten (für Löhne, Energie usw.) in jeder der Abteilungen kommen noch sekundäre Kosten für die Inanspruchnahme von Leistungen anderer Abteilungen hinzu.

Gesucht sind für jede Abteilung die Kosten in Geldeinheiten (GE), die für die Fertigstellung einer Leistungseinheit zu veranschlagen sind. Die Daten, bezogen auf den betrachteten Planungszeitraum, lauten:

A_1 erstellt insgesamt 400 LE und gibt 40 LE an A_2 und 80 LE an A_3 ab;

A_2 erstellt insgesamt 610 LE und gibt 100 LE an A_1 und 20 LE an A_3 ab;

A_3 erstellt insgesamt 510 LE und gibt 50 LE an A_1 und 25 LE an A_2 ab.

Die primären Kosten sind wie folgt gegeben: 100 GE in A_1 , 440 GE in A_2 und 760 GE in A_3 .

Geben Sie ein lineares Modell zu diesem Problem an und berechnen Sie eine Lösung mit Hilfe von Tableaus.