6. Aufgabenblatt zu Operations Research

Abgabe: **Montag, 1. Juni 2015, 10:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe im Raum V3-128: Soliman Keshta PF 126, Diana Kämpfe PF 84. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 6.1 (6 Punkte)

Gegeben ist die folgende Optimierungsaufgabe

$$\left\{\begin{array}{l} -3x_1 - 4x_2 + 120 \to \text{Min} \\ \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 220 \\ \quad 2x_1 + 6x_2 \leq 240 \\ \qquad\quad 8x_2 \leq 260 \\ \; x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}.$$

a) Überführen Sie die Aufgabe in die Formulierung

$$\left\{\begin{array}{r} c^T x + q = z \to \text{Min} \\ \mathbb{H}x = d,\;\; x \geq 0 \end{array}\right\}, \tag{1}$$

wobei $\mathbb{H}$ ein zulässiges Normaltableau ist und z der Zielfunktion des Optimierungsproblems entspricht.

b) Bestimmen Sie alle Basislösungen des Problems.

c) Beantworten Sie die nachstehenden Aufgaben anhand von Tableaus zu (1).

i) Zeigen Sie: Wählt man ein Pivot entsprechend Satz (2.17) i), so erhält man ein zulässiges Tableau.

ii) Welche Beobachtung machen Sie, wenn Sie das Pivot so auswählen, dass die Bedingung i)1) bzw. i)2) verletzt ist?

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Ein Betrieb stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her, die die drei Maschinen M_1, M_2 und M_3 passieren müssen. Die folgende Tabelle enthält die notwendigen Bearbeitungszeiten (h) pro Mengeneinheit (ME), die monatlich zur Verfügung stehenden Maschinenkapazitäten und den Gewinn pro Mengeneinheit (ME) in Geldeinheiten (GE) für jedes Produkt:

Maschine	Bearbeitungszeit in h/ME		Maschinenkapazität in h
	P_1	P_2	
M_1	4	3	60
M_2	2	2	32
M_3	3	7	84
Gewinn in GE/ME	2	3	

Gesucht ist der gewinnmaximale Produktionsplan, d. h. der Produktionsplan, bei dem der Betrieb seinen höchsten Gewinn erzielt.

a) Modellieren Sie ein entsprechendes Optimierungsproblem.

b) Lösen Sie die Optimierungsaufgabe, indem sie alle zulässigen Basislösungen bestimmen und unter diesen die optimalen Lösungen suchen.

Aufgabe 6.3 (6 Punkte)

Betrachtet werden die nachstehenden Grundtypen von zulässigen Bereichen.

Typ 1: $\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbb{A}x \leq b\}$ mit $\mathbb{A} \in \mathrm{Mat}(m, n)$, $b \in \mathbb{R}^m$

Typ 2: $\{x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} : \tilde{\mathbb{A}}x \leq \tilde{b},\ x \geq 0\}$ mit $\tilde{\mathbb{A}} \in \mathrm{Mat}(\tilde{m}, \tilde{n})$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$

Typ 3: $\{x \in \mathbb{R}^l : \mathbb{H}x = d,\ x \geq 0\}$ mit $\mathbb{H} \in \mathrm{Mat}(k, l)$, $d \in \mathbb{R}^k$

Typ 4: $\{x \in \mathbb{R}^{\tilde{l}} : \tilde{\mathbb{H}}x = \tilde{d}\}$ mit $\tilde{\mathbb{H}} \in \mathrm{Mat}(\tilde{k}, \tilde{l})$, $\tilde{d} \in \mathbb{R}^{\tilde{k}}$

Weiter sei die Menge M gegeben, definiert durch

$$M := \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \geq 4,\ x_1 - x_2 \leq 6\Big\}.$$

a) Überführen Sie die Menge M in Typ 1 und anschließend in Typ 4. Geben Sie, ausgehend vom Typ 4, alle Basislösungen für das System an.

b) Formen Sie nun die Menge M in eine äquivalente Menge vom Typ 3 um.

c) Geben Sie eine Umformung für M an, so dass man eine Menge vom Typ 2 erhält, ohne die Anzahl der Variablen zu vergrößern. Wie läßt sich dieses Vorgehen allgemein im $\mathbb{R}^n$ umsetzen?