Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/2014

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 3

Abgabe bis **Freitag, 8.11.2013, 14:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Daniel Altemeier PF 161 (im Kopierraum V3-128)*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 3.I

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein (σ-endlicher) Maßraum mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty \; \forall\, n \geq 1$. Seien ausserdem $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar, d.h. $\int |f_n| d\mu < \infty$ und $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ global im Maß μ, d.h. es gelte

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0: \; \mu\Big(\big\{|f - f_n| > \varepsilon\big\}\Big) \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{mit } n \to \infty.$$

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zudem integrierbar.

a) Sei $f \geq 0$ und $a \wedge b := \min(a, b)$; zeigen Sie:

$$\int_{E_n} f \wedge n \, d\mu \uparrow \int f \; d\mu.$$

b) Beweisen Sie den folgenden Satz, ohne den Satz von Lebesgue zu verwenden:

Satz über beschränkte Konvergenz
Falls eine Menge $E \subseteq \Omega$ existiert mit $\mu(E) < \infty$ und ein $M \in \mathbb{N}$ existiert mit $|f_n| \leq M$, $|f| \leq M$ und $f_n = 0$ auf E^c für alle $n \geq 1$, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu = \int f \; d\mu.$$

Hausaufgabe 3.II *(Lemma von Fatou)*

Zeigen Sie den folgenden Satz:

Lemma von Fatou. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein (σ-endlicher) Maßraum und seien $f_n \geq 0$, $n \geq 1$, messbare Funktionen darauf, dann gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu \geq \int \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu.$$

Hausaufgabe 3.III

Sei X eine reelle, integrierbare Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{A}$-messbare, streng konvexe Abbildung, d.h.

$$\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) > \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad \text{für alle } \lambda \in (0,1).$$

Außerdem sei $\varphi(X)$ integrierbar bzgl. $\mathbb{P}$. Es gelte Gleichheit in der Jensenschen Ungleichung, d.h., dass $\varphi(\mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}[\varphi(X)]$. Zeigen Sie, dass $X = \mathbb{E}[X]$ $\mathbb{P}$-fast sicher gilt.

Hausaufgabe 3.IV

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien X eine exponentialverteilte und Y eine Poisson-verteilte Zufallsvariable darauf. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$, dass X^k und Y^k bezüglich $\mathbb{P}$ integrierbar sind, und berechnen Sie die k-ten Momente $\mathbb{E}[X^k]$ und $\mathbb{E}[Y^k]$.