Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/2014

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 4

Abgabe bis **Freitag, 15.11.2013, 14:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Daniel Altemeier PF 161 (im Kopierraum V3-128)*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 4.I

a) Zeigen Sie, dass aus der Unabhängigkeit von A und B die Unabhängigkeit der folgenden Mengenpaare folgt:

(i) A^c und B,

(ii) A und B^c,

(iii) A^c und B^c.

b) Zeigen Sie, dass die Unabhängigkeit von A und B äquivalent zur Unabhängigkeit der Indikatorfunktionen $\mathbb{1}_A(\cdot)$ und $\mathbb{1}_B(\cdot)$ ist.

c) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei X_i eine Zufallsvariable mit Werten in einer abzählbaren Menge E_i, ausgestattet mit der σ-Algebra $\mathcal{E}_i = \mathcal{P}(E_i)$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ genau dann unabhängig sind, wenn

$$\mathbb{P}\big[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\big] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[X_i = x_i], \qquad \text{für alle } k_i \in E_i, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

d) Seien $X_1, \ldots, X_n$ reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen:

(i) $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig mit einer stetiger Dichte $f_{(X_1,\ldots,X_n)} : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$.

(ii) X_i hat eine stetige Dichte $f_{X_i} : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ und es gilt:

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \qquad \text{für alle } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Hausaufgabe 4.II
Gegeben seien ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und messbare Räume $(E_i, \mathcal{E}_i)$ für $i = 1, \dots, n$ sowie Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to E_i$. Zeigen Sie, dass $\{X_1, \dots, X_n\}$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen ist genau dann, wenn für alle $\mathcal{E}_i$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare $f_i : E_i \to \mathbb{R}$ derart, dass $\mathbb{E}\big[|f_i(X_i)|\big] < \infty$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\mathbb{E}\big[\prod_{i=1}^n |f_i(X_i)|\big] < \infty$,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n |f_i(X_i)|\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[|f_i(X_i)|\right].$$

Hausaufgabe 4.III *(Radon-Nikodym)*
Seien μ, ν und α σ-endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\nu \ll \mu \ll \alpha$.

a) Zeigen Sie, dass für eine ν-integrierbare Funktion f gilt:
$$\int f d\nu = \int f \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

b) Folgern Sie aus Teil a) die Kettenregel für die Radon-Nikodym-Ableitung:
$$\frac{d\nu}{d\alpha} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\alpha} \quad \alpha\text{-f.ü.}$$

Hausaufgabe 4.IV

a) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, die alle exponentialverteilt zum Parameter $\lambda > 0$ sind. Bestimmen Sie die Dichte der Summe $X_1 + \ldots + X_n$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ und $q = 1 - p$ definiere
$$b_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k \in \{0, \dots, n\}.$$
Dann ist die *Binomialverteilung zu n und p* über $\{0, \dots n\}$ definiert durch
$$\text{bin}_{n,p}(A) = \sum_{k=0}^n b_{n,p}(k)\delta_{\{k\}}(A) \text{ für } A \in \mathcal{P}(\{0, \dots, n\}).$$

(i) Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1\}$ und $\mathbb{P}X_i^{-1}\big[\{1\}\big] = p \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $X_1 + \ldots + X_n$ binomialverteilt ist mit den Parametern n und p.

(ii) Zeigen Sie, dass $\text{bin}_{n,p}$ ein W'Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist mit $\Omega = \{0, \dots, n\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$.

(iii) Wir wollen das W'Maß $\text{bin}_{n,p}$ auf $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}$ erweitern. Geben Sie zwei unterschiedliche, geeignete σ-Algebren an.

(iv) Seien $p, \overline{p} \in [0, 1]$. In welchen Fällen gilt $\text{bin}_{n,p} \ll \text{bin}_{n,\overline{p}}$?

(v) Berechnen Sie die Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{d\,\text{bin}_{n,p}}{d\,\text{bin}_{n,\overline{p}}}$ für jene $p, \overline{p}$ für die diese existiert.