Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/2014

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 5

Abgabe bis **Freitag, 22.11.2013, 14:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Daniel Altemeier PF 161 (im Kopierraum V3-128)*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 5.I

a) Sei $\big(X_i\big)_{i\in\{1,2,\dots\}}$ eine Folge von zentrierten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ und $r:\{0,1,\dots\}\to\mathbb{R}$ eine Abbildung mit $r(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Es gelte $\mathbb{E}[X_nX_m]\le r(n-m)$ für $m\le n$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit } \mathbb{P}.$$

b) (i) Sei X eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Sei außerdem $h\ge 0$ eine $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung und $H(x):=\int_{-\infty}^{x}h(y)dy$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left[H(X)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}h(y)\mathbb{P}\big[X\ge y\big]dy.$$

Anmerkung: Dies ist eine Verallgemeinerung von Lemma 2.2.8.

(ii) Seien $\big(X_i\big)_{i\in\{1,2,\dots\}}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ und es gelte

$$\mathbb{P}\big[X_1>x\big]=\begin{cases}1 & \text{für } x\le e,\\[2ex] \dfrac{e}{x\log(x)} & \text{für } x>e.\end{cases}$$

Zeigen Sie, dass X_1 nicht endlich integrierbar ist, d.h., $\mathbb{E}[X_1]=\infty$, und dass eine Folge von Konstanten $\mu_1,\mu_2,\dots$ existiert mit $\mu_i\xrightarrow[i\to\infty]{}\infty$ und

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu_i\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit } \mathbb{P}.$$

Hausaufgabe 5.II (Monte-Carlo-Integration)

Sei f eine messbare Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$ und sei $\big(U_i\big)_{i\in\{1,2,\dots\}}$ eine Familie von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, die uniform auf $[0,1]$ verteilt sind. Sei

$$I_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\big(U_i\big) \qquad \text{für alle } i \in \{1,2,\dots\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 f dx \qquad \text{in Wahrscheinlichkeit } \mathbb{P}.$$

(ii) Sei $\int_0^1 |f(x)|^2 < \infty$. Geben Sie für $a > 0$ eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left[|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}\right]$$

an.

Hausaufgabe 5.III (Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)

Sei $p \in [0,1]$ und sei

$$F := \big\{I\colon \{0,1,\dots\} \to \mathbb{Z} \;\big|\; I(k) - I(k-1) \in \{-1,+1\} \;\forall\, k \in \{1,2,\dots\}, I(0) = 0\big\}.$$

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \{-1,1\}^n$ und jede Auswahl $\{n_1,\dots,n_k\} \subset \{1,\dots,n\}$ sei

$$\mathbb{P}^{(n)}\big[I(n_i) - I(n_i - 1) = \omega_{n_i} \;\forall\, i \in \{1,\dots k\}\big] = p^{\sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{\{1\}}(\omega_{n_i})}(1-p)^{\sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{\{-1\}}(\omega_{n_i})}.$$

Zeigen Sie, dass dadurch eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\big(F, \mathcal{P}(F)\big)$ definiert wird.

b) Zeigen Sie, ohne Aufgabe 5.IV zu verwenden, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\big(F, \mathcal{P}(F)\big)$ existiert mit

$$\mathbb{P}I^{-1}\big(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \mathbb{Z}^{\{1,2,\dots\}}\big) = \mathbb{P}^{(n)}I^{-1}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$$

für alle $I \in F$ und $A_i \subset \mathbb{Z}$, $i \leq n$, und alle $n \in \{1,2,\dots\}$.

Hausaufgabe 5.IV (Unendlichfach wiederholter Münzwurf)

Für das Werfen einer Münze nehmen wir an, dass entweder die Seite mit dem Symbol *Kopf* nach oben zeigt oder die Seite mit dem Symbol *Zahl* nach oben zeigt. Zur Vereinfachung der Notation verwenden wir den Zustandsraum $\{0,1\}$ und identifizieren *Kopf* mit der 1 und *Zahl* mit 0.

a) Sei $p \in (0,1)$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Münzwurf das Symbol *Kopf* bzw. 1 geworfen wird.

   (i) Geben Sie ein geeignetes wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für den n-fachen $\{0,1\}$-Münzwurf an, $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) Konstruieren Sie ein Modell des ∞-fachen Münzwurfs, d.h., zeigen Sie die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $\big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}\big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\big)\big)$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Projektion $\pi^{(n)}\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^n$ das Bildmaß$\mathbb{P}(\pi^{(n)})^{-1}$ der n-fach wiederholte Münzwurf $\mathbb{P}^{(n)}$ ist.

b) Um ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell für den ∞-fachen fairen Münzwurf zu konstruieren, müssen wir nicht den Erweiterungssatz von Kolmogorov verwenden. Betrachten Sie den Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ und definieren Sie für alle $n \in \{1,2,\ldots\}$ die Zufallsvariablen

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lfloor 2^n \omega \rfloor \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } \lfloor 2^n \omega \rfloor \text{ gerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig sind mit $\mathbb{P}[X_k = 1] = \mathbb{P}[X_k = 0] = 1/2$ für alle $k \in \{1,2,\ldots\}$.

c) Folgern Sie aus Aufgabe 5.III die Existenz des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ wie in Aufgabenteil 5.IVa)(ii). Benutzen Sie dazu nicht die Aufgabenteile 5.IVa) und 5.IVb).