Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/2014

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 7

Abgabe bis **Freitag, 13.12.2013, 14:00 Uhr**
Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Daniel Altemeier PF 161 (im Kopierraum V3-128)*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 7.I

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen darauf. Sei

$$S_{m,n} = \sum_{i=m+1}^{n} X_i \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{N}, m < n.$$

Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ gilt:

$$\mathbb{P}\left[\max_{i\in\{m+1,\dots,n\}} |S_{m,i}| > a + b\right] \min_{i\in\{m,\dots,n-1\}} \mathbb{P}\left[|S_{i,n}| \le b\right] \le \mathbb{P}\left[|S_{m,n}| > a\right].$$

Hausaufgabe 7.II

Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Konvergiere S_n für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit. Zeigen Sie, dass $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{P}$-f.s. konvergiert.

Hausaufgabe 7.III

Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Konvergiere S_n/n für $n \to \infty$ gegen 0 in Wahrscheinlichkeit. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n} \max_{i\in\{1,\dots,n\}} S_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

Hausaufgabe 7.IV

Seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängige, zentrierte Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und es gelte $\mathrm{var}(X_n) = \sigma_n^2$ für eine nichtnegative Folge $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

a) Sei $\sum_{i=1}^\infty \sigma_i^2/i^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{i} \qquad \text{und} \qquad \text{(ii)} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

für $n \to \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. konvergieren.

b) Sei $\sum_{i=1}^\infty \sigma_i^2/i^2 = \infty$. Zeigen Sie, dass zentrierte, unabhängige Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ existieren mit $\mathrm{var}(X_i) \le \sigma_i^2$, $i \in \mathbb{N}$, derart, dass X_n/n und $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ für $n \to \infty$ $\mathbb{P}$-f.s. nicht konvergieren.