Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/2014

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 8

Abgabe bis **Freitag, 20.12.2013, 14:00 Uhr**
Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Daniel Altemeier PF 161 (im Kopierraum V3-128)*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 8.I *(Konvergenzgeschwindigkeit im Fall normalverteilter Zufallsvariablen)*
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen darauf. Sei X_1 standard-normalverteilt und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für $a > 0$ beliebig, dass

$$\kappa(\theta) = \frac{\theta^2}{2}, \qquad \kappa'(\theta) = \theta, \qquad \theta_a = a, \qquad \gamma(a) = -\frac{a^2}{2}$$

für die in der Vorlesung definierten Größen $\kappa(\cdot), \theta_a$ und $\gamma(\cdot)$.

Hausaufgabe 8.II *(Konvergenzgeschwindigkeit im Münzwurf)*
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen und $\mathbb{P}[X_1 = 1] = \mathbb{P}[X_1 = -1] = 1/2$ und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass für $a \in (0,1)$:

$$\gamma(a) = -\frac{(1+a)\log(1+a) + (1-a)\log(1-a)}{2}.$$

b) *Wir zeigen eine einfachere Abschätzung als die aus Teil a).*
Sei $\beta = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n)!} \leq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi(\theta) \leq \exp\big(\varphi(\theta) - 1\big) \leq \exp\big(\beta\theta^2\big) \text{ für alle } \theta \leq 1,$$

und dass

$$\mathbb{P}\big[S_n \geq an\big] \leq \exp\left(-\frac{na^2}{4\beta}\right) \qquad \text{für alle } a \in [0,1].$$

Hausaufgabe 8.III

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von unabhängig, identisch verteilten und zentrierten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\big[\exp(\theta X_1)\big] = \infty$ für alle $\theta > 0$. Sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\Big(\mathbb{P}\big[S_n \geq na\big]\Big) = 0 \qquad \text{für alle } a > 0.$$

Hausaufgabe 8.IV

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von unabhängig, identisch verteilten und zentrierten Zufallsvariablen darauf. Sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie für $a > 0$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen

(i) $\gamma(a) = -\infty$,

(ii) $\mathbb{P}[X_1 \geq a] = 0$,

(iii) $\mathbb{P}\big[S_n \geq na\big] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.