Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2013/2014

Wahrscheinlichkeitstheorie I - Übungsblatt 9

Abgabe bis **Freitag, 10.1.2014, 14:00 Uhr**
Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Jonas Jalowy PF 159, Paul Buterus PF 123, Diana Kämpfe PF 84 (im Kopierraum V3-128)*). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 9.I (Konvergenz von Maxima)

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen und sei $F(\cdot)$ die Verteilungsfunktion von X_1. Definiere $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Sei $\alpha > 0$ und

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\alpha} & \text{falls } x \geq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $y > 0$

$$\mathbb{P}\left[\frac{M_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \leq y\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(-y^{-\alpha}\right).$$

b) Sei $\beta > 0$ und

$$F(x) = \begin{cases} 1 - |x|^{\beta} & \text{falls } x \in [-1, 0], \\ 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $y < 0$ gilt:

$$\mathbb{P}\left[n^{\frac{1}{\beta}} M_n \leq y\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(-|y|^{\beta}\right).$$

c) Sei

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $y \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left[M_n - \log(n) \leq y\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\Big(-\exp\big(-y\big)\Big).$$

Hausaufgabe 9.II

a) Zeigen Sie, dass die Gleichverteilung auf $\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ für $n \to \infty$ schwach gegen die uniforme Verteilung auf $[0,1]$ konvergiert.

b) Es seien $\alpha > 0$ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, uniform auf $[0,\alpha]$ verteilter Zufallsvariablen sowie $Y_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $Z_n := n(\alpha - Y_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von Z_n für $n \to \infty$ schwach gegen die Exponentialverteilung mit Parameter $1/\alpha$ konvergiert.

Hausaufgabe 9.III

Seien F und G Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$. Definiere

$$\rho(F,G) := \inf\Big\{\varepsilon : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \le G(x) \le F(x+\varepsilon) + \varepsilon \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\Big\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\rho(\cdot,\cdot)$ eine Metrik auf dem Raum der Verteilungsfunktionen definiert.

b) Zeigen Sie, dass für eine Familie $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen gilt

$$\rho(F_n, F) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} F \text{ schwach.}$$

Hausaufgabe 9.IV

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen und sei X_1 standard-normalverteilt. Definiere $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Wir wissen aus Satz 1.2.3, dass

$$\mathbb{P}\big[X_i > x\big] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{mit } x \to \infty.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\theta \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathbb{P}\left[X_1 > x + \frac{\theta}{x}\right]}{\mathbb{P}\big[X_1 > x\big]} \xrightarrow[x\to\infty]{} \exp(-\theta).$$

b) Definiere b_n derart, dass $\mathbb{P}\big[X_1 > b_n\big] = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left[b_n(M_n - b_n) \le x\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\Big(-e^{-x}\Big).$$

c) Zeigen Sie, dass $b_n \sim \big(2\log(n)\big)^{\frac{1}{2}}$ und zeigen Sie, dass

$$\frac{M_n}{\sqrt{2\log(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$