Wahrscheinlichkeitstheorie I

Christian Wiesel

V5-109

2. Das Gesetz der Großen Zahlen

2.1 Unabhängigkeit

…von Mengen

…von Mengensystemen

…von Zufallsvariablen

I. Unabhängigkeit von (messbaren) Mengen

I.1 Definition und erste Beobachtungen

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition $i)$ $A, B \in \mathcal{F}$ heißen **unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
(man schreibt auch $A \perp\!\!\!\perp B$)

$ii)$ $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ heißen **unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\forall\, I \subset \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

$ii')$ $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ heißen **paarweise unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt:

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j)$$

⚠ Es gilt $ii) \Rightarrow ii')$, die Umkehrung ist aber i.A. falsch!

(siehe Beispiel 2.1.1, Durrett)

I. Unabhängigkeit von (messbaren) Mengen

I.1 Definition und erste Beobachtungen

Sei im Folgenden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition $i)$ $A, B \in \mathcal{F}$ heißen **unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

(man schreibt auch $A \perp\!\!\!\perp B$)

$ii)$ $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ heißen **unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\forall\, I \subset \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Beobachtung $A \perp\!\!\!\perp B \;\Rightarrow\; i)\; A^c \perp\!\!\!\perp B, \quad ii)\; A \perp\!\!\!\perp B^c, \quad iii)\; A^c \perp\!\!\!\perp B^c$

(Übung 2.1.2)

Beweis $i)$

$$A \perp\!\!\!\perp B \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A \cap B) = \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{= 1 - \mathbb{P}(A^c)} \cdot \mathbb{P}(B) = \underbrace{\mathbb{P}(B)}_{= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)} - \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B)$$

$$\Rightarrow\; \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)} = \cancel{\mathbb{P}(A \cap B)} + \mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Beobachtung $A \perp\!\!\!\perp A \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A) \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$

I. Unabhängigkeit von (messbaren) Mengen

I.2 Existenz / Konstruktion von unabhängigen Mengen

Wiederholung: *„Produkte"* *(siehe Abschnitt 1.7.)*

Seien $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mathbb{P}_2)$ W'Räume.

Produktraum $\quad \tilde{\Omega} := \Omega_1 \times \Omega_2 := \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$

Produkt - σ - Algebra $\quad \tilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 := \sigma(\underbrace{\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}}_{=:\, \mathcal{A}})$

Produkmaß *(Satz 1.7.1.)* $\quad \tilde{\mathbb{P}} := \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 :=$ eindeutiges Maß auf $\tilde{\mathcal{F}}$, welches auf $\mathcal{A}$ gegeben ist durch

$$\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2 (A_1 \times A_2) := \mathbb{P}_1(A_1) \cdot \mathbb{P}_2(A_2)$$

Konstruktionsbeispiel $\quad (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \dashrightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}}) := (\Omega \times \Omega, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P})$

$$A, B \in \mathcal{F} \dashrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{A} := A \times \Omega, \\ \tilde{B} := \Omega \times B, \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{A} \cap \tilde{B} = A \times B,$$

$$\Rightarrow\; \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{\mathbb{P}}(A \times B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A}) \cdot \tilde{\mathbb{P}}(\tilde{B})$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(\tilde{A}) = \tilde{\mathbb{P}}(A \times \Omega) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A)$$

Konstruktionsbeispiel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \dashrightarrow (\widetilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathbb{P}}) \coloneqq (\Omega \times \Omega, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P})$

$$A, B \in \mathcal{F} \dashrightarrow \left[\begin{array}{l} \tilde{A} \coloneqq A \times \Omega, \\ \tilde{B} \coloneqq \Omega \times B, \end{array}\right] \Rightarrow \tilde{A} \cap \tilde{B} = A \times B,$$

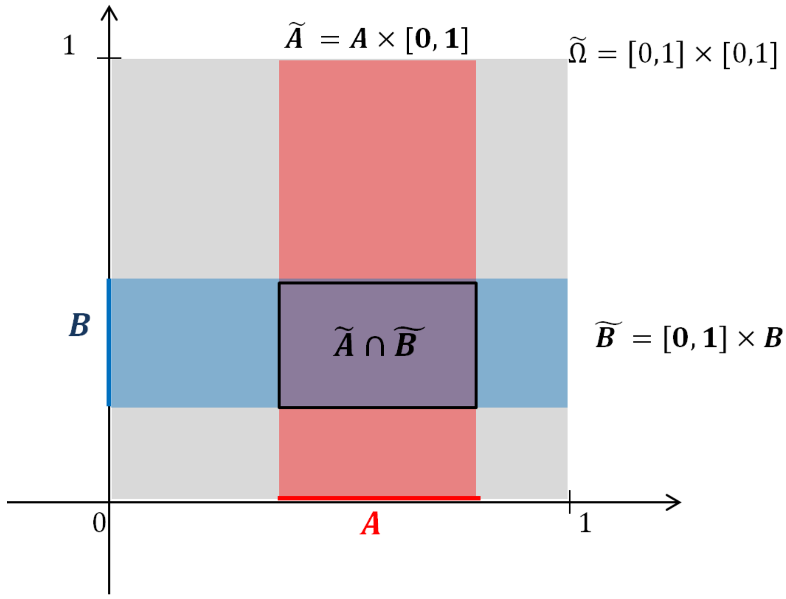
$$\Rightarrow \widetilde{\mathbb{P}}(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \widetilde{\mathbb{P}}(A \times B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \widetilde{\mathbb{P}}(\tilde{A}) \cdot \widetilde{\mathbb{P}}(\tilde{B})$$

$$\boxed{\widetilde{\mathbb{P}}(\tilde{A}) = \widetilde{\mathbb{P}}(A \times \Omega) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A)}$$

Spezialfall

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \coloneqq ([0,1], \mathcal{B}|_{[0,1]}, \lambda|_{[0,1]})$

$A, B \subset [0,1]$ Intervalle



$$\tilde{\lambda}(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) = \tilde{\lambda}(A \times B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B)$$

Fläche Rechteck — Länge · Breite

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Unabhängigkeit

…von Mengen

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ **unabhängig** $:\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \quad \forall\, I \subset \{1, \dots, n\}$

…von Mengensystemen

…von Zufallsvariablen

II. Unabhängigkeit von Mengensystemen

II.1 Definition

Die folgenden Systeme messbarer Mengen sind nicht notwendiger Weise selbst σ-Algebren!

Definition $i)$ $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ heißen **unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ gilt:
(man schreibt auch $\mathcal{A} \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}$) $\quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

$ii)$ $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{F}$ heißen **unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \ \forall A_i \in \mathcal{A}_i$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

$\boxed{\text{"} \Leftarrow \text{" setzte } A_i := \Omega \ \forall i \notin I}$ $\Leftrightarrow \forall A_1 \in \mathcal{A}_1 \cup \{\Omega\}, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n \cup \{\Omega\}$ gilt:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n)$$

Ziel

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{F} \textbf{ unabhängig} \\ \mathcal{A}_i \ \cap\text{-stabil } \forall i = 1, \dots, n \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}_1), \dots, \sigma(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{F} \textbf{ unabhängig}$$

„Es genügt, Unabhängigkeit auf ∩-stabilen Erzeugern zu prüfen"

II. Unabhängigkeit von Mengensystemen

II.2 Exkurs: π- und λ- Systeme

Definition

ein Mengensystem $\mathcal{P}$ ist ein π **– System** $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}$ ist ∩-stabil, d.h. $P_1, P_2 \in \mathcal{P} \overset{!}{\Rightarrow} P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}$

ein Mengensystem $\mathcal{L}$ ist ein λ **– System** $:\Leftrightarrow \begin{cases} i) & \Omega \in \mathcal{L} \\ ii) & A, B \in \mathcal{L} \text{ mit } A \subset B \overset{!}{\Rightarrow} B \setminus A \in \mathcal{L} \\ iii) & \mathcal{L} \ni A_n \nearrow A \overset{!}{\Rightarrow} A \in \mathcal{L} \end{cases}$

Satz 2.1.2 (Dynkin $\pi - \lambda$) Sei $\mathcal{P}$ ein π – System und $\mathcal{L}$ ein λ – System.
Dann gilt: $\mathcal{P} \subset \mathcal{L} \overset{!}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$

Beweis

Sei $\ell(\mathcal{P})$ das **kleinste** λ – System, welches $\mathcal{P}$ enthält, d.h. insbesondere $\ell(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

nur z.z.: $(*)$ $\ell(\mathcal{P})$ ist eine σ-Algebra (die $\mathcal{P}$ enthält), **denn dann:** $\underline{\sigma(\mathcal{P})} \overset{(*)}{\subset} \ell(\mathcal{P}) \ \underline{\subset \mathcal{L}}$

nur z.z.: $(**)$ $\ell(\mathcal{P})$ ist auch π-System,

denn dann:

$$\left.\begin{array}{l} A, B \in \ell(\mathcal{P}) \Rightarrow \quad A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \ \in \ell(\mathcal{P}) \\ A_k \in \ell(\mathcal{P}) \ \forall k \Rightarrow \underbrace{\left(\bigcup_{1 \le k \le n} A_k\right)}_{=: \widetilde{A_n} \in \ell(\mathcal{P})} \nearrow \left(\bigcup_{k \ge 1} A_k\right) \in \ell(\mathcal{P}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \ell(\mathcal{P}) \ \sigma\text{-Algebra} \\ \Rightarrow (*) \end{array}$$

II. Unabhängigkeit von Mengensystemen

II.2 Exkurs: π- und λ- Systeme

Satz 2.1.2 (Dynkin $\pi-\lambda$) Sei $\mathcal{P}$ ein π – System und $\mathcal{L}$ ein λ – System.
Dann gilt: $\mathcal{P} \subset \mathcal{L} \overset{!}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$

Beweis

Sei $\ell(\mathcal{P})$ das **kleinste** λ – System, welches $\mathcal{P}$ enthält, d.h. insbesondere $\ell(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

nur z.z.: $(*)$ $\ell(\mathcal{P})$ ist eine σ-Algebra (die $\mathcal{P}$ enthält), **denn dann:** $\sigma(\mathcal{P}) \overset{(*)}{\subset} \ell(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$

nur z.z.: $(**)$ $\ell(\mathcal{P})$ ist auch π-System,

denn dann:

$$A, B \in \ell(\mathcal{P}) \Rightarrow A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \ell(\mathcal{P})$$

$$A_k \in \ell(\mathcal{P})\ \forall k \Rightarrow \underbrace{\left(\bigcup_{1\le k\le n} A_k\right)}_{=:\,\widetilde{A_n}\,\in\,\ell(\mathcal{P})} \nearrow \left(\bigcup_{k\ge1} A_k\right) \in \ell(\mathcal{P}) \quad \Rightarrow \ell(\mathcal{P})\ \sigma\text{-Algebra} \quad \Rightarrow (*)$$

Wähle $A \in \ell(\mathcal{P})$ fix und setze $\mathcal{G}_A := \{B \in \ell(\mathcal{P}) | A \cap B \in \ell(\mathcal{P})\} \subset \ell(\mathcal{P})$

Für $(**)$ gilt es nun z.z., dass sogar $\mathcal{G}_A \overset{!}{=} \ell(\mathcal{P})$

---

nur z.z.: $(***)$ $\mathcal{G}_A$ ist ein λ-System und $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$, **denn dann:** $\ell(\mathcal{P}) \overset{(***)}{\subset} \mathcal{G}_A \subset \ell(\mathcal{P}) \Rightarrow \mathcal{G}_A = \ell(\mathcal{P})$

$\mathcal{G}_A$ ist ein λ-System: … nachprüfen von $i) - iii)$ …

$\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$: Falls $A \in \mathcal{P}$ dann $A \cap B \in \mathcal{P}\ \forall B \in \mathcal{P}$ (da $\mathcal{P}$ ein π-System), d.h.: $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$

Also sogar $\mathcal{G}_A = \ell(\mathcal{P})\ \forall A \in \mathcal{P}$ und somit sogar $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A\ \forall A \in \ell(\mathcal{P})$.

II. Unabhängigkeit von Mengensystemen

II.3 Unabhängigkeit und σ-Algebren

Satz 2.1.2 (Dynkin $\pi-\lambda$) Sei $\mathcal{P}$ ein π – System und $\mathcal{L}$ ein λ – System. Dann: $\mathcal{P} \subset \mathcal{L} \overset{!}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$

Satz 2.1.3

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{F}\ \textbf{unabhängig} \\ \mathcal{A}_i\ \cap\text{-stabil}\ \forall\, i = 1, \dots, n \end{array}\right\} \overset{!}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{A}_1), \dots, \sigma(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{F}\ \textbf{unabhängig}$$

Beweis

1.) Wähle $A_2 \in \mathcal{A}_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ und definiere $F := A_2 \cap \dots \cap A_n$

sowie $\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{F} | \mathbb{P}(A \cap F) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(F)\}$

„alle von F unabhängigen Mengen“

Beachte

$$A \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap F) = \mathbb{P}(A \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \underset{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n) \underset{\mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(F)$$

$\Rightarrow \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{L} \leftarrow$ λ-System:

π-System

$i)$ $\Omega \in \mathcal{L}$

$ii)$ $A, B \in \mathcal{L}$ mit $A \subset B$ $\Rightarrow \mathbb{P}(\underbrace{(B\backslash A) \cap F}_{=(B\cap F)\backslash(A\cap F)}) = \underbrace{\mathbb{P}(B \cap F)}_{=\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(F)} - \underbrace{\mathbb{P}(A \cap F)}_{=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(F)}$

$= \left(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\right) \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(B\backslash A) \cdot \mathbb{P}(F)$

$\Rightarrow B\backslash A \in \mathcal{L}$

$iii)$ $\mathcal{L} \ni A_n \nearrow A \Rightarrow (A_n \cap F) \nearrow (A \cap F) \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap F) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \cap F)$

$\underset{\mathcal{L} \ni A_n}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(F)$

II. Unabhängigkeit von Mengensystemen

II.3 Unabhängigkeit und σ-Algebren

Satz 2.1.2 (Dynkin $\pi-\lambda$) Sei $\mathcal{P}$ ein π – System und $\mathcal{L}$ ein λ – System. Dann: $\mathcal{P} \subset \mathcal{L} \overset{!}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$

Satz 2.1.3

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{F} \textbf{ unabhängig} \\ \mathcal{A}_i \ \cap\text{-stabil } \forall\, i = 1, \dots, n \end{array}\right\} \overset{!}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{A}_1), \dots, \sigma(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{F} \textbf{ unabhängig}$$

Beweis

1.) Wähle $A_2 \in \mathcal{A}_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ und definiere $F := A_2 \cap \dots \cap A_n$

sowie $\mathcal{L} := \{A \in \mathcal{F} | \mathbb{P}(A \cap F) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(F)\}$

„alle von F unabhängigen Mengen"

$$\Rightarrow \quad \underset{\pi\text{-System}}{\mathcal{A}_1} \subset \underset{\lambda\text{-System}}{\mathcal{L}}$$

2.) $\overset{"\pi-\lambda"}{\Rightarrow} \quad \sigma(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{L} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\mathcal{A}_1), \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ unabhängig

d.h. insgesamt haben wir gefolgert:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{F} \text{ unabhängig} \\ \mathcal{A}_i \ \cap\text{-stabil } \forall\, i = 1, \dots, n \end{array}\right\} \overset{!}{\Rightarrow} \sigma(\mathcal{A}_1), \mathcal{A}_2 \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{F} \text{ unabhängig} \qquad (*)$$

3.) Wende nun $(*)$ auf $\mathcal{A}_2 \dots, \mathcal{A}_n, \sigma(\mathcal{A}_1)$ an! $\Rightarrow$ $\sigma(\mathcal{A}_2), \mathcal{A}_3 \dots, \mathcal{A}_n, \sigma(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{F}$ unabhängig

… nach n Iterationen folgt die Behauptung!

Wahrscheinlichkeitstheorie I

Unabhängigkeit

…von Mengen

$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ **unabhängig** $:\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \quad \forall\, I \subset \{1, \dots, n\}$

…von Mengensystemen

$\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathcal{F}$ **unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\forall\, A_1 \in \mathcal{A}_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_n$ gilt $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n)$

für σ-Algebren gilt: *„Es genügt, Unabhängigkeit auf $\cap$-stabilen Erzeugern zu prüfen"*

…von Zufallsvariablen

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.1 Definition und Charakterisierung

Setup

Seien im Folgenden $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W'Raum und (E, ξ) ein messbarer Raum.

$a)$ Betrachte ZV'n $(i = 1, \dots, n)$ $X_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \xi)$, d.h. $\begin{cases} X_i : \Omega \to E, & \text{Abbildung} \\ X_i^{-1}(\xi) \subset \mathcal{F}, & \text{d.h. } X_i \ (\mathcal{F}, \xi) \text{ messbar} \end{cases}$

$\quad X_i^{-1}(\xi) := \{X_i^{-1}(B) | B \in \xi\} = \{X_i \in B | B \in \xi\}$

$b)$ $X := (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E^n, \xi^n)$

Wiederholung:

„Erzeugte σ-Algebra" *(Formel (1.3.1))*

$$\sigma(X_i) := \sigma\left(X_i^{-1}(\xi)\right) = \sigma(\overbrace{\{X_i \in B | B \in \xi\}}^{\cap\text{-stabiles Erzeugendensystem}})$$

„Bildmaß" *(vgl. Satz 1.6.9)*

$a)$ X_i erzeugt ein Maß $\mathbb{P}X_i^{-1}$ auf (E, ξ) via

$$\mathbb{P}X_i^{-1}(\mathrm{B}_i) := \mathbb{P}\left(X_i^{-1}(B_i)\right) = \mathbb{P}(X_i \in B_i), \ \forall B_i \in \xi$$

$b)$ $X := (X_1, \dots, X_n)$ erzeugt ein Maß $\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)^{-1}$ auf (E^n, ξ^n) via

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)^{-1}(\mathrm{B}_1 \times \dots \times B_n) &:= \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n)^{-1}(B_1 \times \dots \times B_n)\big) \\ &= \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) \in B_1 \times \dots \times B_n\big) \\ &= \underline{\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n)} \end{aligned}$$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.1 Definition und Charakterisierung

Betrachte ZV'n $(i = 1, \dots, n)$ $X_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \xi)$,

---

Definition $i)$ X_1, X_2 heißen **unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\sigma(X_1) \perp\!\!\!\perp \sigma(X_2)$

(man schreibt auch $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$)

$ii)$ $X_1, \dots, X_n$ heißen **unabhängig** $:\Leftrightarrow$ $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ unabhängig

---

Satz 2.1.7 (Charakterisierung der Unabhängigkeit von ZV'n)

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig $:\Leftrightarrow$ $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ unabhängig

$$\underset{a)}{\overset{!}{\Leftrightarrow}} \quad \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in B_n) \quad \forall B_1 \in \xi, \dots, B_n \in \xi$$

$$\underset{b)}{\overset{!}{\Leftrightarrow}} \quad \mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)^{-1} = \mathbb{P}X_1^{-1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}X_n^{-1}$$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.1 Definition und Charakterisierung

Betrachte ZV'n $\quad (i = 1, \dots, n) \quad X_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \xi),$

Satz 2.1.7 (Charakterisierung der Unabhängigkeit von ZV'n)

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig $:\Leftrightarrow \quad \sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ unabhängig

$$\overset{!}{\underset{a)}{\Leftrightarrow}} \quad \mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in B_n)$$

$$\forall\, B_1 \in \xi, \dots, B_n \in \xi$$

$$\overset{!}{\underset{b)}{\Leftrightarrow}} \quad \mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)^{-1} = \mathbb{P}X_1^{-1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}X_n^{-1}$$

Beweis

a) $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)$ unabhängig $\underset{\text{Satz 2.1.3}}{\overset{\text{„Unabhängigkeit auf } \cap\text{-stabilen Erzeugern“}}{\Leftrightarrow}} \underbrace{\{X_1 \in B_1 | B_1 \in \xi\}}_{=:\mathcal{A}_1}, \dots, \underbrace{\{X_n \in B_n | B_n \in \xi\}}_{=:\mathcal{A}_n}$ unabhängig

$$\overset{\text{Def: unabhängige Mengensysteme}}{\Leftrightarrow} \quad \mathbb{P}\big(\overbrace{(X_1 \in B_1)}^{=:A_1 \in \mathcal{A}_1} \cap \dots \cap (X_n \in B_n)\big) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_n \in B_n)$$

$$\forall\, B_1 \in \xi, \dots, B_n \in \xi$$

$$\equiv$$

$$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n)$$

$$\equiv$$

b) $$\mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)^{-1}(\mathrm{B}_1 \times \dots \times B_n) = \mathbb{P}X_1^{-1}(\mathrm{B}_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}X_n^{-1}(\mathrm{B}_n)$$

$$\forall\, B_1 \in \xi, \dots, B_n \in \xi$$

$$\overset{\text{Def. Produktmaß}}{\Leftrightarrow} \quad \mathbb{P}(X_1, \dots, X_n)^{-1} = \mathbb{P}X_1^{-1} \otimes \ldots \otimes \mathbb{P}X_n^{-1} \qquad \square$$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.2 Operationen, bei denen Unabhängigkeit erhalten bleibt

Betrachte nun **reellwertige** ZV'n $\quad (k = 1, \dots, N) \quad X_k : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}),$

Motivation

Idee $\quad X_1, \dots, X_N$ unabhängig $\overset{?!?}{\Rightarrow}$

- $Y_1 := X_1, \quad Y_2 := X_2 \cdot \ldots \cdot X_N \quad$ ebenfalls unabhängig!
- $f_1(X_1, X_2, X_3), \quad f_2(X_4, X_5), \quad f_3(X_6, \dots, X_9)\quad$ unabhängig

$\quad\quad \| \text{ z.B.} \quad\quad \| \text{ z.B.} \quad\quad \|$

$\quad (X_1 + \mathrm{X}_2) \cdot X_3 \quad X_4^2 \cdot X_5 \quad \dots \qquad$ (f_i messbar!)

$\downarrow$

bilde disjunkte Zerlegung

$$\boxed{\{X_1, \dots, X_N\} \equiv \{X_{i,j}\}_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m(i)}}}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & & & & & i \\ \hline & X_{1,1} & \dots & X_{i,1} & \dots & X_{n,1} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & X_{n,m(n)} \\ & X_{1,m(1)} & & \vdots & & \\ j & & & X_{i,m(i)} & & \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$Y_i := f_i\big(X_{i,1}, \dots, X_{i,m(i)}\big)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & i = 1 & i = 2 & i = 3 =: n \\ \hline & X_1 & X_4 & X_6 \\ & X_2 & X_5 & X_7 \\ & X_3 & & X_8 \\ j & & & X_9 \end{array}$$

$m(3) = 4$

Satz 2.1.6 $(X_{i,j})$ unabhängig $\Rightarrow Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.2 Operationen, bei denen Unabhängigkeit erhalten bleibt

Satz 2.1.5 Seien $\left(\mathcal{F}_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m(i)}}$ **Teil-σ-Algebren** $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathcal{F}$ und setze $\mathcal{G}_i \coloneqq \sigma\left(\bigcup_{1\le j\le m(i)} \mathcal{F}_{i,j}\right)$.

Dann: $\left(\mathcal{F}_{i,j}\right)_{i,j}$ unabhängig $\overset{!}{\Rightarrow}$ $\mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_n$ unabhängig

<u>Beweis</u> Setze $\mathcal{A}_i \coloneqq \left\{\bigcap_{1\le j\le m(i)} A_{i,j} \mid A_{i,j} \in \mathcal{F}_{i,j}\right\}, 1 \le i \le n$

$a)$ <u>$\mathcal{A}_i$ $\cap$-stabil:</u> $$\left(\bigcap_{1\le j\le m(i)} A_{i,j}\right) \cap \left(\bigcap_{1\le j\le m(i)} \tilde{A}_{i,j}\right) = \bigcap_{1\le j\le m(i)} \underbrace{\left(A_{i,j} \cap \tilde{A}_{i,j}\right)}_{\in \mathcal{F}_{i,j}} \in \mathcal{A}_i$$

$b)$ <u>$\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ unabhängig:</u> Wähle $A_i \equiv \left(\bigcap_{1\le j\le m} A_{i,j}\right) \in \mathcal{A}_i$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\le i\le n} \bigcap_{1\le j\le m(i)} A_{i,j}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ (\mathcal{F}_{i,j})_{i,j}\\ \text{unabhängig}}}{=} \prod_{1\le i\le n} \underbrace{\prod_{1\le j\le m(i)} \mathbb{P}(A_{i,j})}_{= \mathbb{P}\left(\bigcap_{1\le j\le m(i)} A_{i,j}\right)} =$$

$$= \prod_{1\le i\le n} \mathbb{P}(A_i)$$

$\forall\, i$ fix sind $\mathcal{F}_{i,1},\dots,\mathcal{F}_{i,m(i)}$ unabhängig

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.2 Operationen, bei denen Unabhängigkeit erhalten bleibt

Satz 2.1.5 Seien $\left(\mathcal{F}_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m(i)}}$ **Teil-σ-Algebren** $\mathcal{F}_{i,j} \subset \mathcal{F}$ und setze $\mathcal{G}_i \coloneqq \sigma\left(\bigcup_{1\le j\le m(i)} \mathcal{F}_{i,j}\right)$.

Dann: $\left(\mathcal{F}_{i,j}\right)_{i,j}$ unabhängig $\overset{!}{\Rightarrow}$ $\mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_n$ unabhängig

<u>Beweis</u> Setze $\mathcal{A}_i \coloneqq \left\{\bigcap_{1\le j\le m(i)} A_{i,j} \mid A_{i,j} \in \mathcal{F}_{i,j}\right\}, 1 \le i \le n$

$a)$ <u>$\mathcal{A}_i$ $\cap$-stabil</u>

$b)$ <u>$\mathcal{A}_1,\dots,\mathcal{A}_n$ unabhängig</u>

$$\left.\right\} \overset{\text{Satz 2.1.3}}{\Rightarrow} \begin{matrix} \sigma(\mathcal{A}_1), & \dots, & \sigma(\mathcal{A}_n) \\ \cup & & \cup \end{matrix} \text{ unabhängig}$$

$c)$ <u>$\mathcal{G}_i \subset \sigma(\mathcal{A}_i)\ \forall i,$</u> und damit auch: $\mathcal{G}_1$, ..., $\mathcal{G}_n$ unabhängig!

wähle dazu

$$A_i \in \bigcup_{1\le j\le m(i)} \mathcal{F}_{i,j} \Rightarrow A_i \equiv \bigcup_{1\le j\le m(i)} \underset{\substack{\Cap\\ \mathcal{F}_{i,j}}}{A_{i,j}} = \left(\underbrace{\bigcap_{1\le j\le m(i)} \overset{\substack{\mathcal{F}_{i,j}\\ \Cup}}{A_{i,j}^c}}_{\in \mathcal{A}_i}\right)^c$$

$$\Rightarrow A_i^c \in \mathcal{A}_i \Rightarrow A_i \in \sigma(\mathcal{A}_i)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{1\le j\le m(i)} \mathcal{F}_{i,j} \subset \sigma(\mathcal{A}_i) \Rightarrow \mathcal{G}_i \coloneqq \sigma\left(\bigcup_{1\le j\le m(i)} \mathcal{F}_{i,j}\right) \subset \sigma(\mathcal{A}_i)$$

$\square$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.2 Operationen, bei denen Unabhängigkeit erhalten bleibt

Satz 2.1.5 Seien $(\mathcal{F}_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m(i)}}$ **Teil-σ-Algebren** $\mathcal{F}_{i,j}\subset\mathcal{F}$ und setze $\mathcal{G}_i := \sigma\left(\bigcup_{1\le j\le m(i)} \mathcal{F}_{i,j}\right)$.

Dann: $(\mathcal{F}_{i,j})_{i,j}$ unabhängig $\overset{!}{\Rightarrow}$ $\mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_n$ unabhängig

---

Betrachte **reellwertige** ZV'n, $X_{i,j}:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $\left\{\begin{array}{l}1\le i\le n\\ 1\le j\le m(i)\end{array}\right.$

messbare Funktionen, $f_i:\left(\mathbb{R}^{m(i)},\mathcal{B}^{m(i)}\right)\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $1\le i\le n$

und definiere $Y_i := f_i\big(\underbrace{X_{i,1},\dots,X_{i,m(i)}}_{=:\widetilde{X}_i}\big):(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$

Satz 2.1.6 $\boxed{(X_{i,j})_{i,j} \text{ unabhängig } \overset{!}{\Rightarrow} Y_1,\dots,Y_n \text{ unabhängig}}$

"$\sigma(\sigma(X)\cup\sigma(Y)) = \sigma((X,Y))$"

Beweis Setze $\mathcal{F}_{i,j} := \sigma(X_{i,j})$ und wieder $\mathcal{G}_i := \sigma\left(\bigcup_{1\le j\le m(i)}\mathcal{F}_{i,j}\right) = \sigma(\widetilde{X}_i)$.

$(X_{i,j})_{i,j}$ unabhängig $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$ $(\mathcal{F}_{i,j})_{i,j}$ unabhängig $\overset{\text{Satz 2.1.5}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ unabhängig!

$\cup \qquad \cup$

Nur z.z.: $\sigma(Y_i)\subset\mathcal{G}_i$, denn dann sind auch $\sigma(Y_1),\dots,\sigma(Y_n)$ unabhängig!

Dies gilt, denn: $Y_i = f_i\circ\widetilde{X}_i$ $(\sigma(\widetilde{X}_i),\mathcal{B})$ messbar, d.h.: $\sigma(Y_i)\subset\sigma(\widetilde{X}_i) = \mathcal{G}_i$

$\square$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.2 Operationen, bei denen Unabhängigkeit erhalten bleibt

Betrachte **reellwertige** ZV'n, $X_{i,j}:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $\left\{\begin{array}{l}1\le i\le n\\ 1\le j\le m(i)\end{array}\right.$

messbare Funktionen, $f_i:\left(\mathbb{R}^{m(i)},\mathcal{B}^{m(i)}\right)\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$, $1\le i\le n$

und definiere $Y_i := f_i\big(\underbrace{X_{i,1},\dots,X_{i,m(i)}}_{=:\widetilde{X}_i}\big):(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$

Satz 2.1.6 $\boxed{(X_{i,j})_{i,j} \text{ unabhängig } \overset{!}{\Rightarrow} Y_1,\dots,Y_n \text{ unabhängig}}$

Korollar $X_1,\dots,X_N$ unabhängig $\overset{!}{\Rightarrow}$ $Y_1 := X_1$, $Y_2 := X_2\cdot\ldots\cdot X_N$ ebenfalls unabhängig!

Beweis $f_1(x_1) := x_1$, $f_2(x_2,\dots,x_N) := x_2\cdot\ldots\cdot x_N$ *(messbare Funktionen)*

$\square$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.3 Erwartungswert und Unabhängigkeit

Ziel X_1, X_2 unabhängige ZV'n $\overset{!}{\Rightarrow}$ $\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2]$
(mit $X_i \geq 0$ oder $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$)

Wiederholung

„Integration bzgl. Bildmaß" $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \overset{X}{\rightarrow} (E, \xi, \mathbb{P}X^{-1}) \overset{f}{\rightarrow} (\mathbb{R}, \mathcal{B})$,
(Satz 1.6.9)

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_\Omega f \circ X(\omega)\ \mathbb{P}(d\omega) \overset{!}{=} \int_E f(x)\ \mathbb{P}X^{-1}(dx)$$

Check: $f = 1_B, B \in \xi \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[1_B(X)] = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}X^{-1}(B) = \int_E 1_B(x) \mathbb{P}X^{-1}(dx)$

Satz 1.7.2 (Fubini) *Maßräume* *Produktraum*

Betrachte $\left\{\begin{matrix}(E_1, \xi_1, \mu_1) \\ (E_2, \xi_2, \mu_2)\end{matrix}\right. \dashrightarrow (E_1 \times E_2, \xi_1 \otimes \xi_2, \mu_1 \otimes \mu_2) \overset{h}{\rightarrow} (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Falls $i)\ h \geq 0$
oder $ii) \int_{E_1 \times E_2} |h(x,y)| \mu_1 \otimes \mu_2(d(x,y)) < \infty$

$$\overset{!}{\Rightarrow} \int_{E_1 \times E_2} h(x,y) \mu_1 \otimes \mu_2(d(x,y)) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} h(x,y) \mu_1(dx) \right) \mu_2(dy) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} h(x,y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx)$$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.3 Erwartungswert und Unabhängigkeit

Betrachte nun zwei rellwertige, **unabhängige(!)** ZV'n $\left\{\begin{matrix} X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}X^{-1}), \\ Y: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}Y^{-1}), \end{matrix}\right.$

und eine **messbare** Funktion $h: (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Satz 2.1.8 $a)$ *Falls* $i)\ h \geq 0$
oder $ii)\ \mathbb{E}[|h(X,Y)|] < \infty$

$$\underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{\overset{!}{\Rightarrow}} \mathbb{E}[h(X,Y)] = \int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} h(x,y) \mathbb{P}X^{-1}(dx)\, \mathbb{P}Y^{-1}(dy)$$

$b)$ *Spezialfall* $h(x,y) = f(x)g(y)$, *für messbare Funktionen* $f, g: (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Falls $i)\ f, g \geq 0$
oder $ii)\ \mathbb{E}[|f(X)|] < \infty,$
$\mathbb{E}[|g(Y)|] < \infty$

$$\underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{\overset{!}{\Rightarrow}} \mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{E}[g(Y)]$$

Beweis

$a)$ *verwende „Fubini" mit* $(E_1 \times E_2, \xi_1 \otimes \xi_2, \mu_1 \otimes \mu_2) := (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, \mathbb{P}X^{-1} \otimes \mathbb{P}Y^{-1}) \overset{h}{\rightarrow} (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

prüfe, ob Voraussetzungen für Fubini gegeben sind:

$i)\ h \geq 0 \quad \Rightarrow$ dies entspricht unmittelbar Fall $i)$ in Fubini!

$ii) \int_{\mathbb{R}^2} |h(x,y)| \mathbb{P}X^{-1} \otimes \mathbb{P}Y^{-1}(d(x,y)) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \int_{\mathbb{R}^2} |h(x,y)| \mathbb{P}(X,Y)^{-1}(d(x,y)) = \mathbb{E}[|h(X,Y)|] < \infty$

$\Rightarrow$ dies entspricht Fall $ii)$ in Fubini!

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.3 Erwartungswert und Unabhängigkeit

Betrachte nun zwei rellwertige, **unabhängige(!)** ZV'n

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}X^{-1}), \\ Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}Y^{-1}), \end{cases}$$

und eine **messbare** Funktion $h : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Satz 2.1.8 $a)$ $\left.\begin{cases} \textit{Falls} \;\; i) \;\; h \geq 0 \\ \textit{oder} \;\; ii) \;\; \mathbb{E}[|h(X,Y)|] < \infty \end{cases}\right\} \underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{\overset{!}{\Rightarrow}} \mathbb{E}[h(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x,y) \mathbb{P}X^{-1}(dx) \, \mathbb{P}Y^{-1}(dy)$

Beweis

$a)$ *verwende „Fubini"* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, \mathbb{P}X^{-1} \otimes \mathbb{P}Y^{-1}) \overset{h}{\to} (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Voraussetzungen für Fubini sind gegeben:

$i)$ $h \geq 0$

$$ii) \int_{\mathbb{R}^2} |h(x,y)| \mathbb{P}X^{-1} \otimes \mathbb{P}Y^{-1}(d(x,y)) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \int_{\mathbb{R}^2} |h(x,y)| \mathbb{P}(X,Y)^{-1}(d(x,y)) = \mathbb{E}[|h(X,Y)|] < \infty$$

$$\overset{\text{„Fubini"}}{\Rightarrow} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \mathbb{P}X^{-1} \otimes \mathbb{P}Y^{-1}(d(x,y))}_{\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \int_{\mathbb{R}^2} h(x,y) \mathbb{P}(X,Y)^{-1}(d(x,y)) = \mathbb{E}[h(X,Y)]} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x,y) \mathbb{P}X^{-1}(dx) \mathbb{P}Y^{-1}(dy)$$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.3 Erwartungswert und Unabhängigkeit

Betrachte nun zwei rellwertige, **unabhängige(!)** ZV'n

$$\begin{cases} X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}X^{-1}), \\ Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}Y^{-1}), \end{cases}$$

und eine **messbare** Funktion, $h : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$,

---

Satz 2.1.8 $a)$ $\left.\begin{cases} \textit{Falls} \;\; i) \;\; h \geq 0 \\ \textit{oder} \;\; ii) \;\; \mathbb{E}[|h(X,Y)|] < \infty \end{cases}\right\} \underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{\overset{!}{\Rightarrow}} \mathbb{E}[h(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x,y) \mathbb{P}X^{-1}(dx) \, \mathbb{P}Y^{-1}(dy)$

$b)$ *Spezialfall* $h(x,y) = f(x)g(y)$ *für messbare Funktionen* $f, g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$$\left.\begin{cases} \textit{Falls} \;\; i) \;\; f, g \geq 0 \\ \textit{oder} \;\; ii) \;\; \mathbb{E}[|f(X)|] < \infty \\ \qquad\qquad \mathbb{E}[|g(Y)|] < \infty \end{cases}\right\} \underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{\overset{!}{\Rightarrow}} \mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{E}[g(Y)]$$

Beweis

$$b)\, i) \;\; f, g \geq 0 \Rightarrow h \geq 0 \;\; \Rightarrow \mathbb{E}[f(X)g(Y)] \equiv \mathbb{E}[h(X,Y)] \overset{a), i)}{=} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathbb{P}X^{-1}(dx)}_{\mathbb{E}[f(X)]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} g(y) \, \mathbb{P}Y^{-1}(dy)}_{\mathbb{E}[g(Y)]}$$

($\Rightarrow a), i)$ *anwendbar!*)

$ii)$ *Wende* $b), i)$ *auf* $|f|, |g| \geq 0$:

$$\Rightarrow \mathbb{E}[|h(X,Y)|] \equiv \mathbb{E}[|f(X)| \cdot |g(Y)|] \overset{b), i)}{\equiv} \underbrace{\mathbb{E}[|f(X)|]}_{< \infty} \cdot \underbrace{\mathbb{E}[|g(Y)|]}_{< \infty} < \infty$$

$$\overset{a), ii)}{\Rightarrow} \mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \ldots \textit{ wie in } b), i) \ldots = \mathbb{E}[f(X)] \cdot \mathbb{E}[g(Y)]$$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.3 Erwartungswert und Unabhängigkeit

Betrachte nun zwei rellwertige, **unabhängige(!)** ZV'n und eine **messbare** Funktion,

$$\begin{cases} X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}X^{-1}), \\ Y: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P}Y^{-1}), \end{cases}$$
$$h: (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}),$$

Satz 2.1.8 $a)$ $\left.\begin{cases} \textit{Falls} \quad i) \quad h \geq 0 \\ \textit{oder} \;\; ii) \; \mathbb{E}[|h(X,Y)|] < \infty \end{cases}\right\} \overset{!}{\underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{\Rightarrow}} \mathbb{E}[h(X,Y)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} h(x,y) \mathbb{P}X^{-1}(dx)\, \mathbb{P}Y^{-1}(dy)$

$b)$ *Spezialfall* $h(x,y) = f(x)g(y)$ *für messbare Funktionen* $f, g: (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$$\left.\begin{cases} \textit{Falls} \quad i) \quad f, g \geq 0 \\ \textit{oder} \;\; ii) \; \mathbb{E}[|f(X)|] < \infty \\ \qquad\qquad \mathbb{E}[|g(Y)|] < \infty \end{cases}\right\} \overset{!}{\underset{X \perp\!\!\!\perp Y}{\Rightarrow}} \mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$$

Satz 2.1.9 Seien $X_1, \dots, X_n$ **unabhängige**, reellwertige ZV'n. $X_i: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$,

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Falls } i) \;\; X_i \geq 0 \;\forall i \\ \textit{oder } ii) \; \mathbb{E}[|X_i|] < \infty \;\forall i \end{array}\right\} \overset{!}{\Rightarrow} \mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$$

<u>Beweis</u> Aus dem Korollar zu Satz 2.1.6 folgt: $X := X_1 \perp\!\!\!\perp Y := X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$

Verwende Satz 2.1.8 $b), i)$ mit $f(x) := |x|, g(y) := |y| \geq 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}[|X| \cdot |Y|] = \mathbb{E}[|X|] \cdot \mathbb{E}[|Y|]$, d.h. $\mathbb{E}[|X_1 \cdot \ldots \cdot X_n|] = \mathbb{E}[|X_1|] \cdot \mathbb{E}[|X_2 \cdot \ldots \cdot X_n|]$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.3 Erwartungswert und Unabhängigkeit

Satz 2.1.9 Seien $X_1, \dots, X_n$ **unabhängige**, reellwertige ZV'n. $X_i: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$,

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Falls } i) \;\; X_i \geq 0 \;\forall i \\ \textit{oder } ii) \; \mathbb{E}[|X_i|] < \infty \;\forall i \end{array}\right\} \overset{!}{\Rightarrow} \mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$$

<u>Beweis</u> Aus dem Korollar zu Satz 2.1.6 folgt: $X := X_1 \perp\!\!\!\perp Y := X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$

Verwende Satz 2.1.8 $b), i)$ mit $f(x) := |x|, g(y) := |y| \geq 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}[|X| \cdot |Y|] = \mathbb{E}[|X|] \cdot \mathbb{E}[|Y|]$, d.h. $\mathbb{E}[|X_1 \cdot \ldots \cdot X_n|] = \mathbb{E}[|X_1|] \cdot \mathbb{E}[|X_2 \cdot \ldots \cdot X_n|]$

$$\overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} \quad \mathbb{E}[|X_1 \cdot \ldots \cdot X_n|] = \mathbb{E}[|X_1|] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[|X_n|] \quad (*_1)$$

$$\text{analog} \quad \mathbb{E}[|X_2 \cdot \ldots \cdot X_n|] = \mathbb{E}[|X_2|] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[|X_n|] \quad (*_2)$$

<u>Fall $i)$</u> $X_i \geq 0 \;\forall i \;\Rightarrow\; X_i \geq 0 \;\forall i \Rightarrow |X_i| = X_i \;\; \forall i \overset{(*_1)}{\Rightarrow} \mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$

<u>Fall $ii)$</u> <u>Ziel:</u> Verwende Satz 2.1.8 $b), ii)$ mit $f(x) := x, g(y) := y$

Dieser ist anwendbar, denn: $\mathbb{E}[|f(X)|] = \mathbb{E}[|X_1|] < \infty$

und $\mathbb{E}[|g(Y)|] = \mathbb{E}[|X_2 \cdot \ldots \cdot X_n|] \overset{(*_2)}{=} \mathbb{E}[|X_2|] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$

Nun gilt also: $\mathbb{E}[\underbrace{X_1}_{f(X)} \cdot \underbrace{X_2 \ldots \cdot X_n}_{g(Y)}] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2 \cdot \ldots \cdot X_n] \underset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} \mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.4 Unkorreliertheit, Kovarianz, Varianz

$$X_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

$$X := (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

(es wird keine Unabhängigkeit vorausgesetzt!)

Wir setzen nun voraus, dass $\mathbb{E}\left[X_i^2\right] < \infty \ \forall i.$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left[|X_i \cdot X_j|\right] \leq \mathbb{E}\left[X_i^2\right]^{1/2} \cdot \mathbb{E}\left[X_j^2\right]^{1/2} < \infty$

und $\mathbb{E}\left[|X_i \cdot 1|\right] \leq \mathbb{E}\left[X_i^2\right]^{1/2} \cdot 1 < \infty$

Definition (Unkorreliertheit)

$i)$ X_1, X_2 heißen **unkorreliert** $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2]$

$ii)$ $X_1, \dots, X_n$ heißen **unkorreliert** $:\Leftrightarrow$ $\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt:
$\mathbb{E}\left[X_i \cdot X_j\right] = \mathbb{E}[X_i] \cdot \mathbb{E}\left[X_j\right]$

Definition (Kovarianz)

$i)$ $\text{cov}(X_1, X_2) := \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbb{E}X_2)] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] - \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}X_2$

$ii)$ $\Sigma(X) := \left(\text{cov}(X_i, X_j)\right)_{i,j}$ (dies ist die sogenannte Kovarianzmatrix)

Definition (Varianz) $\text{Var}(X_1) := \text{cov}(X_1, X_1) = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}X_1)^2] = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}X_1)^2$

Satz

$i)$ $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \underset{\text{Satz 2.1.9}}{\Rightarrow} X_1, X_2$ unkorreliert $\Leftrightarrow \text{cov}(X_1, X_2) = 0$

$ii)$ $X_1, \dots, X_n$ unabhängig $\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ unkorreliert $\Leftrightarrow \text{cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j$

$\Leftrightarrow \Sigma(X)$ diagonal

III. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

III.4 Unkorreliertheit, Kovarianz, Varianz

$$X_i : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

$$X := (X_1, \dots, X_n) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$$

(es wird keine Unabhängigkeit vorausgesetzt!)

Wir setzen nun voraus, dass $\mathbb{E}\left[X_i^2\right] < \infty \ \forall i.$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left[|X_i \cdot X_j|\right] \leq \mathbb{E}\left[X_i^2\right]^{1/2} \cdot \mathbb{E}\left[X_j^2\right]^{1/2} < \infty$

und $\mathbb{E}\left[|X_i \cdot 1|\right] \leq \mathbb{E}\left[X_i^2\right]^{1/2} \cdot 1 < \infty$

Definition (Kovarianz)

$i)$ $\text{cov}(X_1, X_2) := \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbb{E}X_2)] = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] - \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}X_2$

$ii)$ $\Sigma(X) := \left(\text{cov}(X_i, X_j)\right)_{i,j}$ (dies ist die sogenannte Kovarianzmatrix)

Definition (Varianz) $\text{Var}(X_1) := \text{cov}(X_1, X_1) = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}X_1)^2] = \mathbb{E}[X_1^2] - (\mathbb{E}X_1)^2$

Satz

$i)$ $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \underset{\text{Satz 2.1.9}}{\Rightarrow} X_1, X_2$ unkorreliert $\Leftrightarrow \text{cov}(X_1, X_2) = 0$

$ii)$ $X_1, \dots, X_n$ unabhängig $\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ unkorreliert $\Leftrightarrow \text{cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j$

$\Leftrightarrow \Sigma(X)$ diagonal

Satz

$X_1, \dots, X_n$ unkorreliert $\overset{!}{\Rightarrow} \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n)$

<u>Beweis</u> $\text{Var}(\sum_i X_i) = \mathbb{E}[(\sum_i (X_i - \mathbb{E}X_i))^2] = \sum_{i,j} \underbrace{\mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}X_i) \cdot \left(X_j - \mathbb{E}X_j\right)\right]}_{\text{cov}(X_i, X_j)} = \sum_i \text{Var}(X_i)$

$\square$