Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe, Katharina von der Lühe, Christian Wiesel SS 2014

1. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 17. April 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Diana Kämpfe PF 84). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie sowohl Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Wir betrachten im Folgenden stets einen Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}_o, \mathbb{P}\}$.

Übungsaufgabe 1.I

Sei X eine ZV mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, kurz: $X \in L^2(\mathcal{F}_o)$, und seien Teil-σ-Algebren $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_o$ gegeben. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gilt:

$$\mathbb{E}\left(\{X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\}^2\right) + \mathbb{E}\left(\{\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\}^2\right) = \mathbb{E}\left(\{X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\}^2\right). \tag{1}$$

Interpretation: Der bedingte Erwartungswert kann als Projektion von dem Hilbertraum $L^2(\mathcal{F}_o)$ in den abgeschlossenen Unterraum $L^2(\mathcal{F})$ aufgefasst werden - vgl. Theorem 5.1.8 im Durrett. Der aus dieser Projektion resultierende mittlere quadratische Fehler $\mathbb{E}\left(\{X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\}^2\right)$ ist dabei umso kleiner, je größer die σ-Algebra $\mathcal{F}$ ist. Dies folgt unmittelbar durch Auslassen des zweiten (positiven!) Summanden aus Gleichung (1), wodurch man folgende Ungleichung erhält: $\mathbb{E}\left(\{X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\}^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\{X - \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\}^2\right)$, für $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

b) Die *bedingte Varianz* ist definiert durch $\mathrm{var}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})^2$. Zeigen Sie, dass sich als Spezialfall von Gleichung (1) folgende Zerlegung der Varianz von X ergibt:

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\left(\mathrm{var}(X|\mathcal{F})\right) + \mathrm{var}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})). \tag{2}$$

Übungsaufgabe 1.II

Seien $Y_1, Y_2, ... \in L^2(\mathcal{F}_o)$ *uiv* mit Mittelwert μ und Varianz σ. Sei darüber hinaus $N \in L^2(\mathcal{F}_o)$ eine unabhängige, $\mathbb{N}$-wertige ZV und definiere $X = Y_1 + \cdots + Y_N$. Beweisen Sie, dass sich die Varianz von X auf folgende Weise zerlegen lässt:

$$\mathrm{var}(X) = \sigma^2 \mathbb{E}[N] + \mu^2 \mathrm{var}(N). \tag{3}$$

Verwenden Sie hierzu Gleichung (2) mit einer geeigneten Wahl von $\mathcal{F}$.

Hinweis: Zur Interpretation dieses Resultates ist es hilfreich, sich die beiden Spezialfälle anzuschauen, in denen entweder N oder Y_k konstant ist.

Übungsaufgabe 1.III

Sei $X \in L^2(\mathcal{F}_o)$, sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_o$ eine Teil-σ-Algebra und es gelte, dass X *in Verteilung* mit $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ übereinstimme. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen sogar $X = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$, $\mathbb{P}$-f.s. gilt.

Hinweis: Berechnen Sie die Varianz einer geeignet gewählten ZV mit Hilfe von Gleichung (2).

Übungsaufgabe 1.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am 22.04., bzw. 24.04. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Bedingte Erwartungswerte.