Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe, Christian Wiesel SS 2014

10. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 20. Juni 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Christian Wiesel PF 55). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Hausaufgabe 10.I [6 Punkte]

Ein $\mathbb{R}$-wertiger, stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ indiziert durch eine Menge von Zeitpunkten T heißt *Gaußsch* oder *Gauß-Prozess*, falls die endlich-dimensionalen Verteilungen von $(X_t)_{t\in T}$ jeweils eine multivariante Normalverteilung sind, d.h. für alle $t_1, \dots, t_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, ist

$$\mathbf{X} := (X_{t_1} \dots, X_{t_n}) \sim \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\Big\langle x-\mu,\, \Sigma^{-1}(x-\mu)\Big\rangle\right\} \mathrm{d}x,$$

wobei $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite, symmetrische Matrix ist, die der zu $\mathbf{X}$ gehörigen Kovarianzmatrix entspricht, und $\mu \in \mathbb{R}^n$ der Erwartungswertvektor zu $\mathbf{X}$.

Ein Gauß-Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt *zentriert*, falls $\mathbb{E}[X_t] = 0$ für alle $t \in T$, und die Zuordnung $\Gamma(s,t)\colon (s,t) \mapsto \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ mit $s, t \in T$ heißt *Kovarianzfunktion*.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jeder zentrierte Gauß-Prozess ist modulo Äquivalenz (d.h. gleiche endlich-dimensionale Verteilungen) eindeutig durch seine Kovarianzfunktion festgelegt.

b) Die Brownsche Bewegung ist ein zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\Gamma(s,t) = s \wedge t$.

c) Falls $(X_t)_{t\geq 0}$ ein zentrierter Gauß-Prozess mit $\Gamma(s,t) = s\wedge t$ und $\mathbb{P}$-f.s. stetigen Pfaden ist, so ist $(X_t)_t$ eine Brownsche Bewegung.

d) Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, dann sind die folgenden zwei Prozesse $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ und $(\hat{B}_t)_{t\geq 0}$ ebenfalls Brownsche Bewegungen.

$$\tilde{B}_t := \frac{1}{c} B_{c^2 t} \quad \text{für } c > 0 \text{ fix.} \quad (\textit{Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung})$$

$$\hat{B}_t := B_{t+a} - B_a \quad \text{für } a > 0 \text{ fix.} \quad (\textit{Translation der Brownschen Bewegung})$$

Hausaufgabe 10.II [6 Punkte]
Seien $\xi_1, \xi_2, \dots$ unabhängig, identisch verteilt mit $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$ und $\mathrm{Var}(\xi_1) = 1$, $S_n := \sum_{k=1}^n \xi_k$ und $Y_t := S_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)\xi_{\lfloor t \rfloor + 1}$ für $t \geq 0$. Ferner sei $a \in \mathbb{R}$ und λ das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$.

a) Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ die Brownsche Bewegung bzgl. dem Wiener-Maß $\mathbb{P}_\star$. Zeigen Sie, dass für jede $\mathscr{B}(\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}))$-messbare, $\mathbb{P}_\star$-f.s. stetige Abbildung $\psi\colon \mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt

$$\psi(Y_{n\bullet}/\sqrt{n}) \xrightarrow{\mathrm{w}} \psi(B_\bullet) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Hinweis: Erinnern Sie sich an Resultate zur schwachen Konvergenz.

b) Betrachten Sie die Abbildung $\Lambda_a\colon \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\Lambda_a(\omega) := \lambda\left(\{t \in [0,1] \mid \omega(t) > a\}\right)$.

i) Weisen Sie nach, dass Λ_a messbar bzgl. $\mathscr{B}(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}))$ ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $h\colon \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $h(\omega,t) = \omega(t)$.

ii) Zeigen Sie, dass Λ_a nicht in allen ω stetig ist.

iii) Zeigen Sie, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen $\mathcal{U}_{\Lambda_a}$ zumindest eine $\mathbb{P}_\star$-Nullmenge ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass gilt: $\mathcal{U}_{\Lambda_a} \subseteq \left\{\omega \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \,\middle|\, \lambda(\{t \mid \omega(t) = a\}) > 0\right\} =: \mathcal{U}_{\lambda>0}$ und $\mathbb{P}_\star(\mathcal{U}_{\lambda>0}) = 0$.

c) Zeigen Sie: $\#\left\{m \leq n \mid S_m > a\sqrt{n}\right\}/n \xrightarrow{\mathrm{w}} \lambda\left(\{t \in [0,1] \mid B_t > a\}\right)$ für $n \to \infty$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, warum es reicht das Resultat auf der Menge $\{\max_{m \leq n} |\xi_m| \leq \varepsilon\sqrt{n}\}$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, zu verifizieren. Bringen Sie auf dieser Menge $(Y_t)_{t\geq 0}$ und $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Beziehung und wenden Sie a) an.

Hausaufgabe 10.III (*Vortragsvorbereitung*)
Bereiten Sie für das Tutorium am 24.06. bzw. 26.06. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die gegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Invarianzprinzip von Donsker