Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe, Christian Wiesel
SS 2014

11. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 27. Juni 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Christian Wiesel PF 55). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Hausaufgabe 11.I [6 Punkte]
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für jedes $F \in \mathscr{B}(\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}^d))$ ist die Abbildung $x \mapsto \mathbb{P}^x(F)$ $\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-$\mathscr{B}([0,1])$-messbar.
Hinweis: Nutzen Sie das π-λ-Theorem für Dynkin-Systeme.

b) Der Koordinatenabbildung-Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ mit der vom Prozess erzeugten Filtrierung $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ ist auf $\big(\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}^d),\mathscr{B}(\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}^d))\big)$ unter dem

  i) d-dim. Wiener-Maß $\mathbb{P}^0$ eine d-dim. Brownsche Bewegung mit Start in 0.
  ii) Maß $\mathbb{P}^x(F) := \mathbb{P}^0(F-x)$ für $F \in \mathscr{B}(\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}^d))$, $x \in \mathbb{R}^d$, eine d-dim. Brownsche Bewegung mit Start x.
  iii) Maß $\mathbb{P}^\mu(F) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}^x(F)\mu(\mathrm{d}x)$ für $F \in \mathscr{B}(\mathcal{C}([0,\infty),\mathbb{R}^d))$ eine d-dim. Brownsche Bewegung mit Startverteilung μ, wobei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$.

Hausaufgabe 11.II [2 Punkte]
Sei $(\mathbf{B}_t)_{t\geq 0} = (B_t^{(1)},\dots,B_t^{(d)})_{t\geq 0}$ eine d-dim. Brownsche Bewegung bzgl. einer Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit Startverteilung μ. Zeigen Sie, dass für jedes $1 \leq i \leq d$ der Prozess $M^{(i)} = (M_t^{(i)})_{t\geq 0}$ definiert durch

$$M_t^{(i)} := B_t^{(i)} - B_0^{(i)}$$

ein stetiges, quadratisch integrierbares $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal mit $\langle M^{(i)}, M^{(j)}\rangle = t\delta_{ij}$, $1 \leq i,j \leq d$, ist. Ferner ist der Vektor der Martingale $\mathbf{M} = (M^{(1)},\dots,M^{(d)})$ unabhängig von $\mathcal{F}_0$.

Hausaufgabe 11.III [4 Punkte]
Sei (S,ρ) ein metrischer Raum und sei f eine $\mathbb{R}$-wertige Funktion auf S. Zeigen Sie, dass f universell messbar ist genau dann, wenn für jedes endliche Maß μ auf $(S,\mathscr{B}(S))$ eine $\mathscr{B}(S)$-$\mathscr{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktion $g_\mu\colon S \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $\mu(\{x \in S \mid f(x) \neq g_\mu(x)\}) = 0$.

Hausaufgabe 11.IV (*Vortragsvorbereitung*)
Bereiten Sie für das Tutorium am 01.07. bzw. 03.07. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die gegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Beweis zu Satz 5.12: Eine d-dim. Brownsche Bewegung/Familie ist ein Markoff-Prozess/Familie.