

## 12. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 04. Juli 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Christian Wiesel PF 55). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Sei  $\{\Omega, \mathcal{F}\}$  im Folgenden stets ein messbarer Raum.

### Hausaufgabe 12.I [4 Punkte]

Betrachtet wird eine Markoffsche Familie  $\{(X_t)_{t \geq 0}, \{\mathbb{P}^x\}_{x \in \mathbb{R}^d}\}$  auf  $\{\Omega, \mathcal{F}\}$  zusammen mit Shift-Operatoren  $\{\theta_s\}_{s \geq 0}$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen einander implizieren:

c") Für jedes  $s \geq 0$  und  $F \in \mathcal{F}_\infty^X$  gilt

$$\mathbb{P}^x(\theta_s^{-1}F \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}^x(\theta_s^{-1}F \mid X_s) \quad \mathbb{P}^x\text{-f.s.}$$

c'") Für jedes  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $s \geq 0$ ,  $G \in \mathcal{F}_s$  und  $F \in \mathcal{F}_\infty^X$  gilt

$$\mathbb{P}^x(G \cap \theta_s^{-1}F \mid X_s) = \mathbb{P}^x(G \mid X_s) \cdot \mathbb{P}^x(\theta_s^{-1}F \mid X_s) \quad \mathbb{P}^x\text{-f.s.} \quad (1)$$

Anmerkung: Die Gleichung (1) kann wie folgt interpretiert werden. Die „Vergangenheit“  $G$  und die „Zukunft“  $F$  sind, gegeben der „Gegenwart“  $X_s$ , bedingt unabhängig voneinander.

### Hausaufgabe 12.II [4 Punkte]

Konstruieren Sie ein Martingal, das kein Markoff-Prozess ist.

### Hausaufgabe 12.III [4 Punkte]

Beweisen Sie Proposition 6.6: Sei  $\{(X_t)_{t \geq 0}, \{\mathbb{P}^x\}_{x \in \mathbb{R}^d}\}$  eine starke Markoffsche Familie auf  $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ , adaptiert an eine Filtrierung  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $F \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)})$  und jede  $(\mathcal{F}_t)_t$ -Optionszeit  $\sigma$

c')  $\mathbb{P}^x(X_{\sigma+\bullet} \in F \mid \mathcal{F}_{\sigma+}) = \mathbb{P}^x(X_{\sigma+\bullet} \in F \mid X_\sigma) \quad \mathbb{P}^x\text{-f.s. auf } \{\sigma < \infty\};$

d')  $\mathbb{P}^x(X_{\sigma+\bullet} \in F \mid X_\sigma = y) = \mathbb{P}^y(X_\bullet \in F) \quad \text{für } \mathbb{P}^x X_\sigma^{-1}\text{-f.s. jedes } y \in \mathbb{R}^d.$

### Hausaufgabe 12.IV (Vortragsvorbereitung)

Bereiten Sie für das Tutorium am 08.07. bzw. 10.07. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die gegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Erläutern Sie, dass die in Definition 5.19 angegebene  $d$ -dim. Brownsche Familie wirklich eine Markoffsche Familie ist.