Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe, Christian Wiesel SS 2014

13. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 11. Juli 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Christian Wiesel PF 55). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Hausaufgabe 13.I [6 Punkte]

i) Zeigen Sie: Ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal mit $\mathbb{E}[X_0^2] < \infty$ und endlicher totaler Variation $V_T^{(1)}$ für ein $T \geq 0$, so ist X_t $\mathbb{P}$-f.s. konstant auf $[0,T]$.

ii) Beweisen Sie, dass $\mathbb{P}$-fast alle Pfade der Brownsche Bewegung von unbeschränkter totaler Variation sind.

iii) Seien $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $H\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ rechtsstetig und $(\Pi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[0,1]$ mit Feinheit $\|\Pi^{(n)}\|$, so dass $\|\Pi^{(n)}\| \to 0$ für $n \to \infty$. Das Integral $I_n\colon \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ sei durch

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)(H(t_{j+1}) - H(t_j))$$

definiert. Zeigen Sie, dass, wenn die Zahlenfolge $(I_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ konvergiert, H von beschränkter Variation ist.

Anmerkung: Diese Aussage zeigt, dass es nicht ausreicht die pfadweise Integration à la Stieltjes einfach nur etwas abzuändern, um das stochastische Integral (bzgl. einer Brownschen Bewegung) als Stieltjes-Integrals definieren zu können. Denn nach ii) sind die Pfade einer Brownschen Bewegung $\mathbb{P}$-f.s. von unbeschränkter totaler Variation.

Hausaufgabe 13.II (*Vortragsvorbereitung*)
Bereiten Sie für das Tutorium am 15.07. bzw. 17.07. Kurzvorträge zu den unten stehenden Themen vor. Sie sollten dazu die gegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Thema 1 Konstruktion des stochastischen Integrals bzgl. der Brownschen Bewegung
Nutzen Sie, dass die Konstruktion einfacher wird im Fall, wenn der Integrator durch eine Brownsche Bewegung gegeben ist.

Thema 2 Eigenschaften des stochastischen Integrals