Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe, Christian Wiesel SS 2014

2. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 25. April 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Diana Kämpfe PF 84). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie sowohl Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Wir betrachten im Folgenden stets einen Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ zusammen mit einer Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ auf $\mathcal{F}$.

Übungsaufgabe 2.I

a) Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein *messbarer*, $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess und T eine *endliche* Zufallszeit. Zeigen Sie, dass durch $\omega \to X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ eine messbare Abbildung definiert wird, d.h. dass X_T eine Zufallsvariable ist.

b) Für eine gegebene $\{\mathcal{F}_t\}_t$-*Stoppzeit* T wurde die σ-*Algebra der* T-*Vergangenheit* definiert als

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \geq 0\}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $\mathcal{F}_T$ tatsächlich um eine σ-Algebra handelt, dass die Zufallsvariable T $\mathcal{F}_T$-messbar ist und dass im Spezialfall einer konstanten Stoppzeit $T(\omega) := t \geq 0$ einfach $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ gilt.

Übungsaufgabe 2.II

Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein $\{\mathcal{F}_t\}_t$-adaptierter , $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess mit *rechtsstetigen* Pfaden. Für eine messbare Teilmenge $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist die Ersteintrittszeit H_Γ definiert durch:

$$H_\Gamma(\omega) := \inf\{t \geq 0 \mid X_t(\omega) \in \Gamma\} \tag{2}$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ offen ist, dann definiert H_Γ eine $\{\mathcal{F}_t\}_t$-*Optionszeit*.

b) Falls $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen ist und alle Pfade von X *stetig* sind, dann definiert H_Γ eine $\{\mathcal{F}_t\}_t$-*Stoppzeit*.

Übungsaufgabe 2.III

Seien T und S $\{\mathcal{F}_t\}_t$-Stoppzeiten und sei $Z \in L^1(\mathcal{F})$, also eine integrierbare ZV.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a)
$$\mathbb{E}\left(Z|\mathcal{F}_S\right) = \mathbb{E}\left(Z|\mathcal{F}_{T\wedge S}\right), \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{S \leq T\},$$

zeigen Sie also, dass gilt:
$$\mathbb{1}_{\{S\leq T\}} \cdot \mathbb{E}\left(Z|\mathcal{F}_S\right) = \mathbb{1}_{\{S\leq T\}} \cdot \mathbb{E}\left(Z|\mathcal{F}_{T\wedge S}\right), \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

b)
$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(Z|\mathcal{F}_S\right)|\mathcal{F}_T\right) = \mathbb{E}\left(Z|\mathcal{F}_{T\wedge S}\right) \text{ } \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Übungsaufgabe 2.IV (***Vortragsvorbereitung***)

Bereiten Sie für das Tutorium am 29.04., bzw. 30.04. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Filtrierungen und Stoppzeiten.