Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe, Christian Wiesel SS 2014

3. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 2. Mai 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Diana Kämpfe PF 84). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie sowohl Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Wir betrachten im Folgenden stets einen Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ zusammen mit einer Filtrierung $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf $\mathcal{F}$.

Übungsaufgabe 3.I

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $\{\mathcal{F}_n\}_n$-adaptierter Prozess und es gelte $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $(X_n)_n$ *genau dann* ein Submartingal ist, wenn für alle beschränkten $\{\mathcal{F}_n\}_n$-Stoppzeiten τ gilt:

$$\mathbb{E}(X_\tau) \leq \mathbb{E}(X_N) \quad \forall N \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } \tau \leq N.$$

Bemerkung: Diese Aussage liefert also eine äquivalente Charakterisierung der Submartingaleigenschaft.

Übungsaufgabe 3.II

Sei $(Z_n)_{n\geq 1}$ eine Folge $\{-1, +1\}$-wertiger, *uiv* Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(\{Z_1 = +1\}) = \mathbb{P}(\{Z_1 = -1\}) = 1/2.$$

Der *Random Walk* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei nun definiert als

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} Z_k \quad \forall n \geq 1, \qquad S_0 := 0.$$

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, handelt es sich hierbei um ein *Martingal* bzgl. der von $(S_n)_n$ erzeugten Filtrierung

$$\mathcal{F}_n^S := \sigma(S_0, ..., S_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wir definieren nun für ein beliebig gewähltes $\alpha \in \mathbb{R}$ den Prozess $(X_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$X_n^\alpha := \frac{1}{(\cosh \alpha)^n} \cdot \exp\{\alpha S_n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass es sich auch bei $(X_n^\alpha)_n$ um ein $\left\{\mathcal{F}_n^S\right\}_n$- Martingal handelt.

Bemerkung: Martingale dieser Form nennt man auch exponentielle *Martingale.*

Übungsaufgabe 3.III

Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bzgl. einer Filtrierung $\{\mathcal{F}_n\}_n$ mit $M_n \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_n), \forall n \in \mathbb{N}_0$. Weiterhin seien $\sigma \leq \tau \leq N \in \mathbb{N}_0$ zwei beschränkte $\{\mathcal{F}_n\}_n$–Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass M_σ und M_τ beide in $\mathcal{L}^2(\mathcal{F})$ liegen und dass gilt

$$\mathbb{E}\left[(M_\tau - M_\sigma)^2 \mid \mathcal{F}_\sigma\right] = \mathbb{E}\left[M_\tau^2 - M_\sigma^2 \mid \mathcal{F}_\sigma\right],$$

sowie

$$\mathbb{E}\left[(M_\tau - M_\sigma)^2\right] = \mathbb{E}\left[M_\tau^2 - M_\sigma^2\right]. \tag{1}$$

Zeigen Sie nun mit Hilfe von Gleichung (1), dass $X_n := M_n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$ ein $\{\mathcal{F}_n\}_n$-*Submartingal* definiert.

Vergleich: In der Vorlesung wurde dieses Resultat bereits mit Hilfe der Jensen'schen Ungleichung bewiesen, welche angewendet werden konnte, da es sich bei $\varphi(x) := x^2$ um eine konvexe Abbildung handelt.

Übungsaufgabe 3.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am 06.05., bzw. 08.05. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Doob's optionaler Stoppsatz.