4. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 9. Mai 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Diana Kämpfe PF 84). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie sowohl Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Wir betrachten im Folgenden stets einen Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$.

Übungsaufgabe 4.I

Sei $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtrierung auf $\mathcal{F}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein *nichtnegatives* $\{\mathcal{F}_n\}_n$-Supermartingal. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Der Limes $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ existiert $\mathbb{P}$-f.s. und die so definierte Zufallsvariable X_∞ liegt in $\mathcal{L}^1(\mathcal{F}_\infty)$, ist also integrierbar und $\mathcal{F}_\infty$ -messbar.

b) Es gilt $\mathbb{E}\left(X_\infty \mid \mathcal{F}_n\right) \leq X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung: Da mit Aussage $b)$ *die Supermartingaleigenschaft auch für das sogenannte* letzte Element X_∞ *gilt, bezeichnet man in diesem Fall ferner* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}}$ *als Supermartingal.*

Übungsaufgabe 4.II (Ein Beweis von Kolmogorovs 0-1-Gesetz mit Martingaltechniken)

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge *unabhängiger* Zufallsvariablen und

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n\geq 0} \sigma\left(\{X_n, X_{n+1}, ...\}\right)$$

die von $(X_n)_n$ erzeugte *terminale* σ-Algebra. Außerdem sei $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die von $(X_n)_n$ erzeugte Filtrierung, d.h. $\mathcal{F}_n^X := \sigma\left(X_0, ..., X_n\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie, dass für $C \in \mathcal{T}$ die folgenden Aussagen $\mathbb{P}$-f.s. gelten

a) $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_C \mid \mathcal{F}_n^X\right) = \mathbb{P}\left[C\right]$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$,

b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_C \mid \mathcal{F}_n^X\right) = \mathbb{1}_C$.

Leiten Sie nun daraus ab, dass $\mathbb{P}\left[C\right] \in \{0, 1\}$ für alle $C \in \mathcal{T}$ gilt.

Übungsaufgabe 4.III
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie unabhängiger, identisch verteilter $\mathcal{L}^1$-Zufallsvariablen, die *nicht* $\mathbb{P}$-f.s. konstant seien. Es sei der Random Walk $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert als

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad S_0 := 0,$$

zusammen mit der von $(S_n)_n$ erzeugten Filtrierung $\mathcal{F}_n^S := \sigma(S_0, ..., S_n)$.

Wir setzen zunächst voraus, dass $\mu := \mathbb{E}(X_1) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass das Martingal $(S_n)_n$ *nicht* in $\mathcal{L}_1$ konvergiert. Weisen hierfür nach, dass $(S_n)_n$ keine $\mathcal{L}^1$-Cauchy-Folge ist.

b) Zeigen Sie, dass für jede $(\mathcal{F}_n^S)_n$-Stoppzeit τ mit $\mathbb{E}(\tau) < \infty$ das Martingal $(S_{n\wedge\tau})_n$ in $\mathcal{L}^1$ gegen S_τ konvergiert.

c) Folgern Sie, dass $\mathbb{E}(S_\tau)$=0.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall mit beliebigem $\mu := \mathbb{E}(X_1) \in \mathbb{R}$. Es sei $\tilde{X}_k := X_k - \mu$, $\forall k \in \mathbb{N}$, und

$$\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k, \quad \tilde{S}_0 := 0.$$

Wenden Sie das Resultat c) auf $(\tilde{S}_n)_n$ an und folgern Sie, dass im allgemeinen Fall gilt

$$\mathbb{E}(S_\tau) = \mu \cdot \mathbb{E}(\tau).$$

Hinweis zu b): Beweisen und verwenden Sie $\mathbb{E}\left(|X_k| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau\geq k\}}\right) = \mathbb{E}\left(|X_k|\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{\tau \geq k\}\right)$.

Übungsaufgabe 4.IV (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am 13.05., bzw. 15.05. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Der Beweis des Submartingal-Konvergenzsatzes mithilfe des Doob'schen Upcrossing Lemmas.