5. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 16. Mai 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Diana Kämpfe PF 84). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie sowohl Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Anmerkung: Den Übungsaufgaben 5.I und 5.II sind diesmal jeweils 6 Punkte zugeordnet.

Wir betrachten im Folgenden stets einen Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$.

Übungsaufgabe 5.I (Doobsche Submartingalungleichung; 2. Form)

Wir beweisen die Doobsche Submartingalungleichung in ihrer 2. Form zunächst im *zeitdiskreten* Fall. Sei also $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ eine Filtrierung von $\mathcal{F}$ und $(X_k)_{k\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_k)_k$-Submartingal. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und alle $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\min_{m\leq k\leq n} X_k \leq -\lambda\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\left[\mathbb{E}(X_n^+) - \mathbb{E}(X_m)\right]. \tag{1}$$

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $\lambda > 0$ gegeben. Beweisen Sie (1) in folgenden Schritten:

a) Definieren Sie eine geeignete $(\mathcal{F}_k)_k$-Stoppzeit T mit der Eigenschaft

$$\{T \leq n\} = \left\{\min_{m\leq k\leq n} X_k \leq -\lambda\right\}.$$

b) Betrachten Sie die beschränkte Stoppzeit $\tau := T \wedge n$, um zu zeigen, dass

$$\mathbb{E}(X_m) \leq -\lambda \cdot \mathbb{P}(\{T \leq n\}) + \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{T\leq n\}}\right).$$

c) Beweisen Sie folgende Abschätzung:

$$\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}\left(X_n \cdot \mathbb{1}_{\{T\leq n\}}\right) \leq \mathbb{E}(X_n^+).$$

d) Folgern Sie die Ungleichung (1).

Sei nun $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtrierung von $\mathcal{F}$ in *stetiger* Zeit und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartingal, dessen Pfade alle rechtsstetig sind. Folgern sie unter Verwendung des zeitdiskreten Resultates (1), dass nun für alle $0 \leq s_0 \leq t_0$ und alle $\lambda > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\inf_{s_0\leq t\leq t_0} X_t \leq -\lambda\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\left[\mathbb{E}(X_{t_0}^+) - \mathbb{E}(X_{s_0})\right].$$

Definition

Seien $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ eine *fallende* Folge von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$, d.h.

$$...\mathcal{G}_{n+2} \subset \mathcal{G}_{n+1} \subset \mathcal{G}_n \subset \mathcal{F},$$

und $(Y_n)_{n\geq 0}$ ein $(\mathcal{G}_n)_n$-adaptierter Prozess mit $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$ für alle $n \geq 0$. Dann heißt $(Y_n)_n$ *Rückwärts-Submartingal*, falls gilt:

$$\mathbb{E}(Y_n \mid \mathcal{G}_{n+1}) \geq Y_{n+1} \quad \mathbb{P}\text{-f.s. für alle } n \geq 0.$$

Übungsaufgabe 5.II (Gleichgradige Integrierbarkeit von Rückwärts-Submartingalen)

Sei nun $(Y_n)_{n\geq 0}$ ein Rückwärts-*Sub*martingal bzgl. $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$ und es gelte

$$E := \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) > -\infty.$$

Zeigen Sie, dass $\{Y_n \mid n \geq 0\}$ *gleichgradig integrierbar* ist in folgenden Schritten:

a) $(Y_n)_n^+$ ist ebenfalls ein Rückwärts-Submartingal

b) Es gibt eine obere Schranke $c < \infty$, so dass für alle $\lambda > 0$ und alle $n \geq 0$ gilt:

$$\lambda \cdot \mathbb{P}(|Y_n| > \lambda) \leq c < \infty.$$

c) $\{Y_n^+ \mid n \geq 0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

d) Für alle $n \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{E}(Y_n^- \cdot \mathbb{1}_{\{Y_n^- \geq \lambda\}}) = -\mathbb{E}(Y_n \cdot \mathbb{1}_{\{Y_n \leq -\lambda\}}).$$

e) Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt:

$$-\mathbb{E}(Y_n \cdot \mathbb{1}_{\{Y_n \leq -\lambda\}}) \leq \mathbb{E}(Y_m) - \mathbb{E}(Y_n) - \mathbb{E}(Y_m \cdot \mathbb{1}_{\{Y_n \leq -\lambda\}}).$$

f) $\{Y_n^- \mid n \geq 0\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Sei nun $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Submartingal in stetiger Zeit und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *fallende* Folge reeller Zahlen die von rechts gegen ein $t \geq 0$ konvergiert. Setze $\mathcal{G}_n := \mathcal{F}_{t_n}$ und $Y_n := X_{t_n}$.

i) Zeigen Sie, dass $(Y_n)_n$ ein Rückwärts-Submartingal bzgl. $(\mathcal{G}_n)_n$ definiert.

ii) Zeigen Sie, dass $\{X_{t_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig integrierbar ist.

Übungsaufgabe 5.III (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am 20.05., bzw. 22.05. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Der Beweis der Doob'schen Submartingal-Ungleichung (1. Form) in *stetiger* Zeit mithilfe der zeitdiskreten Version und eines Stetigkeitsargumentes.