Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz
Diana Kämpfe, Christian Wiesel SS 2014

6. Übungsblatt zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Abgabe 23. Mai 2014, bis spätestens 12:30 Uhr

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe (Kopierraum V3-128: Katharina von der Lühe PF 186, Christian Wiesel PF 55). *Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie sowohl Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.*

Wir betrachten im Folgenden stets einen Wahrscheinlichkeitsraum $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$.

Übungsaufgabe 6.I [4 Punkte] (Stoppsatz für Submartingale und beschränkte Optionszeiten)

a) Wir beweisen den Stoppsatz für Submartingale zunächst im *zeitdiskreten* Fall.

Sei also $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ eine Filtrierung von $\mathcal{F}$ und $(X_k)_{k\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_k)_k$-Submartingal. Dann gilt für alle *beschränkten* $(\mathcal{F}_k)_k$-Stoppzeiten $S \leq T$:

$$\mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_S) \geq X_S, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{1}$$

Hinweis: Verwenden Sie den schon bekannten Stoppsatz für Martingale.

b) Sei nun eine beliebige Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von $\mathcal{F}$ in *stetiger* Zeit gegeben. Für eine $(\mathcal{F}_t)_t$-Optionszeit τ definieren wir die σ-Algebra $\mathcal{F}_{\tau^+}$ durch:

$$\mathcal{F}_{\tau^+} := \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t^+} \text{ für alle } t \geq 0\}.$$

Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Optionszeiten und $\tau := \inf_n \tau_n$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{F}_{\tau^+} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{\tau_n^+}. \tag{2}$$

Hinweise:

'$\subset$': Zeigen Sie, dass für Optionszeiten $\sigma \leq \tau$ die Inklusion $\mathcal{F}_{\sigma^+} \subset \mathcal{F}_{\tau^+}$ folgt.

'$\supset$': Zeigen sie zunächst, dass $\mathcal{F}_{\tau^+} = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$

c) Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ wieder eine Filtrierung von $\mathcal{F}$ und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartingal, dessen Pfade alle rechtsstetig sind. Folgern sie unter Verwendung des zeitdiskreten Resultates (1) und in Analogie zur Vorlesung, dass für alle *beschränkten* $(\mathcal{F}_t)_t$*-Optionszeiten* $\sigma \leq \tau$ gilt:

$$\mathbb{E}(X_\tau \mid \mathcal{F}_{\sigma^+}) \geq X_\sigma, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{3}$$

Hinweis: Es genügt hier, die nötigen Modifikationen des in der Vorlesung gegebenen Beweises aufzuzeigen.

Übungsaufgabe 6.II [2 Punkte] (Charakterisierung der Submartingaleigenschaft)

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtrierung von $\mathcal{F}$ und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptierter, rechtsstetiger Prozess mit $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass $(X_t)_t$ genau dann ein Submartingal ist, wenn für alle Paare $\sigma \leq \tau$ von beschränkten $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten gilt: $\mathbb{E}(X_\tau) \geq \mathbb{E}(X_\sigma)$.

Bemerkung: Dies Aussage liefert, ähnlich wie im zeitdiskreten Fall, eine äquivalente Charakterisierung der Submartingaleigenschaft.

Übungsaufgabe 6.III [2 Punkte] (Neustart eines Submartingals an einer Stoppzeit)

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtrierung von $\mathcal{F}$, welche die üblichen Bedingungen erfülle. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartinal und τ eine beschränkte $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeit. Definiere nun für alle $t \geq 0$ $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_{\tau+t}$, sowie $\tilde{X}_t := X_{\tau+t} - X_\tau$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ erfüllt ebenfalls die üblichen Bedingungen.

b) $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ ist ein rechtsstetiges $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$-Submartingal.

Hinweis: Beachten Sie, dass unter den üblichen Bedingungen der Begriff von Optionszeit und Stoppzeit übereinstimmen, und dass für alle Stoppzeiten τ gilt: $\mathcal{F}_{\tau^+} = \mathcal{F}_\tau$.

Übungsaufgabe 6.IV [4 Punkte] (Mitgliedschaft in den Klassen *DL* und *D*)

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtrierung von $\mathcal{F}$ und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsstetiges $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartingal. Zeigen sie, dass $(X_t)_t$ *von der Klasse DL* ist, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

a) $X_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$.

b) Es existiert ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ und ein $(\mathcal{F}_t)_t$-adaptierter, *wachsender* Prozess $(A_t)_{t\geq 0}$, sodass sich $(X_t)_t$ für alle $t \geq 0$ darstellen lässt als $X_t = M_t + A_t$.

Zeigen Sie, dass $(X_t)_t$ sogar *von der Klasse D* ist, falls gilt:

$(X_t)_t$ ist ein gleichgradig integrierbares Martingal.

Übungsaufgabe 6.V (*Vortragsvorbereitung*)

Bereiten Sie für das Tutorium am 27.05., bzw. 28.05. einen Kurzvortrag zum unten stehenden Thema vor. Sie sollten dazu die angegebene Thematik in Ihren eigenen Worten präsentieren. Die Form der Präsentation ist Ihnen überlassen.

Der Beweis des *optionalen Stoppsatzes* für rechtsstetige $(\mathcal{F}_t)_t$-Martingale $(M_t)_t$ mit letztem Element M_∞ und beliebige $(\mathcal{F}_t)_t$-Stoppzeiten $\sigma \leq \tau$.